Richiami: Una funzione $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice alternante e multilineare se (sulle righe) se

1) $f(P_{ij}A) = -f(A) \quad \forall i \neq j, \forall A$

2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall i, \forall A$

3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A) \quad \forall i,j, \forall A, \forall c \in \mathbb{K}$

Es: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a$ non è multilineare sulle righe, perché non è lineare nella seconda riga:

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f((a,b),(c,d))$ $\qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$

$f((a,b), \lambda(c,d) + \mu(c',d')) = a$ $\qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 2 f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\| ??$

$\lambda f((a,b),(c,d)) + \mu f((a,b),(c',d')) = (\lambda + \mu) a$

Teorema: $\forall n \geq 1$. Esiste un'unica f.ne $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ alternante e multilineare sulle righe e t.c.

$$f(\mathbb{1}_n) = 1.$$

Questa f.ne si chiama determinante e si denota con det (o con $\det^{(n)}$).

dim: Esistenza: la vediamo dopo.

Unicità: Sia f una tale funzione. Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Quanto fa $f(A)$?

$$A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow E_2 E_1 A \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow E_K E_{K-1} \cdots E_2 E_1 A = R = \mathrm{rref}(A)$$

dove $E_1, \dots, E_K$ sono matrici elementari. Quindi

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{K-1}^{-1} E_K^{-1} R = F_1 F_2 \cdots F_{K-1} F_K R$$

dove $F_i = E_i^{-1}$ è una matrice elementare.

$\Rightarrow f(A) = c\, f(R)$ per ~~un op~~ lo scalare c

ottenuto dalle operazioni el. $F_1, \dots, F_K$:

Es:

$$A = P_{ij}\, D_i(2)\, F_{ke}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, 1\!\!1_n$$

$$
\begin{aligned}
f(A) &= f\left(P_{ij}\, D_i(2)\, F_{ke}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, 1\!\!1_n\right) \\
&= -f\left(D_i(2)\, F_{ke}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, 1\!\!1_n\right) \\
&= -2\, f\left(F_{ke}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, 1\!\!1_n\right) \\
&= -2\, f\left(D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, 1\!\!1_n\right) \\
&= 8\, f\left(F_{hk}(100)\, 1\!\!1_n\right) \\
&= \overset{c}{\overset{\shortparallel}{8}}\, f(1\!\!1_n) \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Due possibilità per R:

1) R ha l'ultima riga nulla

2) $R = \mathbb{1}_n$ $\qquad \left(R = D_n(0) R \Rightarrow f(R) = f(D_n(0) R) = 0\, f(R) = 0 \right)$

Quindi

$$f(R) = \begin{cases} 0 & \text{se } R \text{ ha l'ultima riga nulla} \\ 1 & \text{se } R = \mathbb{1}_n \end{cases}$$

Quindi

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \operatorname{rg} A < n \\ c & \text{se } \operatorname{rg} A = n \end{cases}$$

Se g è un'altra f.ni con le stesse proprietà di f, $g(A) = f(A)\ \forall A \Rightarrow f = g$. ■

$\underline{Es}$: $n = 1$

1) $\det^{(1)} : \mathrm{Mat}_{1\times 1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

$\det^{(1)}(1) = 1$ ed è lineare. $\Rightarrow$ $\det^{(1)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$.

2) $n = 2$:

$$\det^{(2)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \det^{(2)}\big((a,b),(c,d)\big)$$

lineare sulla 1ª riga $\rightarrow$ $= \det^{(2)}\big(a\,(1,0) + b\,(0,1),\ (c,d)\big)$

$$= a \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + b \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

op. el. di Tipo III $\nearrow$

$$= a \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + b \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

lineare sulla 2ª riga $\rightarrow$ $= ad \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bc \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= ad \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - bc \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad - bc$$

Prop.: $\det^{(2)}$ esiste ed è la f-ne $\det^{(2)}: Mat_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$$\det^{(2)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad-bc.$$

dim:

La f.ne $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad-bc$ è multilineare e alternante e vale 1 su $\mathbb{1}_2$. $\blacksquare$.

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = i(1+i)-1 = i-2$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 12-12 = 0.$$

COR: Data $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

A è invertibile $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

dim: Se $rg(A) < n$, $\det^{(n)}(A) = 0$.

Se $rg(A) = n$, $\det^{(n)}(A) = c$
dove

$$c = \det(F_1)\det(F_2)\cdots\det(F_k) \neq 0$$

dove $A = F_1 \cdots F_k$ (F_i matrice elementare come nella dimostrazione).

Infatti,

$$\det(P_{ij}) = \det(P_{ij}\mathbb{1}_n) = -\det(\mathbb{1}_n) = -1$$
$$\det(D_i(\lambda)) = \det(D_i(\lambda)\mathbb{1}_n) = \lambda\det(\mathbb{1}_n) = \lambda$$
$$\det(F_{ij}(c)) = \det(F_{ij}(c)\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n) = 1.$$

$\blacksquare$

Per calcolare il determinante di A (se esiste!) sembra che dobbiamo calcolare rref(A).

<u>Es</u>:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det\left((3,1,2),(5,6,1),(2,-2,0)\right)$$

$$= \det\left(3\left(1,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right),(5,6,1),(2,-2,0)\right)$$

$$\to \overset{!}{=} 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 13/3 & -7/3 \\ 0 & -8/3 & -4/3 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 13/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & -56/39 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\cdot 1\cdot\frac{13}{3}\cdot\left(-\frac{56}{39}\right) = -\cancel{56/3} \quad -36$$

Prop.: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ a scala. Allora

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

dim: $rg(A) = \#$ pivot di A. Quindi

$rg(A) = n \iff$ i pivot sono tutti sulla diagonale

$$\left(A = \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \right).$$

Quindi se $rg(A) < n$, $\det(A) = 0 = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Se $rg(A) = n$ allora $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$.

Dividiamo ogni riga di A per il suo pivot

$$A \rightsquigarrow D_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right) D_2\left(\frac{1}{a_{22}}\right) \cdots D_n\left(\frac{1}{a_{nn}}\right) A = U = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = D_n(a_{nn}) D_{n-1}(a_{n-1,n-1}) \cdots D_1(a_{11})\, U$

$\Rightarrow \det(A) = a_{nn} a_{n-1,n-1} \cdots a_{11} \det(U)$

D'altronde, $\det(U) = 1$ perché U può essere trasformata in $\mathbb{1}_n$ tramite operazioni elementari di tipo III. $\blacksquare$

Es:

•) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -6$$

•) $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = -36$$

$$\cdot)\ \det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 3-2i & 3i & 8+2i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 1 & i & 4-i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 1-i & i & 1+i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & -1 & -2+6i \\ 0 & -2 & -2+13i \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & 1 & -7i \\ 0 & -2 & -2+13i \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & i & 4-i \\ 0 & 1 & -7i \\ 0 & 0 & -2-i \end{pmatrix} =$$

$$= -(-2-i) = 2+i$$

Comando MATLAB : det

Per calcolare il determinante di A (per ora) la tecnica è:

1) Ridurre a a scala, ricordandosi le operazioni elementari elementari effettuate

2) Calcolare il prodotto degli elementi diagonali.

Es: Dimostrare che i polinomi

$$\mathcal{B} = \{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3,\ \dots,\ 1+x+x^2+\dots+x^n\}$$

formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

dim:

$$F_e : \mathbb{K}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \qquad e = \{1, x, \dots, x^n\}.$$

$$F_e(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\mathcal{B}$ è una base $\Leftrightarrow$ $F_e(\mathcal{B})$ è una base $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1$$

$$A \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[R_1 \mapsto -R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 .$$