Abbiamo visto come usare l'algoritmo di Gauss per

1) Calcolare una base del nucleo di una matrice

2) Calcolare l'inversa di una matrice invertibile

3) Base dell'immagine ed il rango di una matrice.

<u>oggi</u>: 4) Studio della dipendenza/Indipendenza lineare ed estrazione di basi da un insieme di generatori

1ª ora [5) Se $V = \mathbb{K}^n$ o $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$, per calcolare la matrice di cambiamento di base tra basi non-standard.

2ª ora [Determinante.

Siano $\mathcal{I} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ f.g..

Vogliamo sapere se $\mathcal{I}$ è lin. Ind. oppure lin. Dip.
e nel caso sia linearmente dipendente estrarre da $\mathcal{I}$ una base di $\langle \mathcal{I} \rangle$.

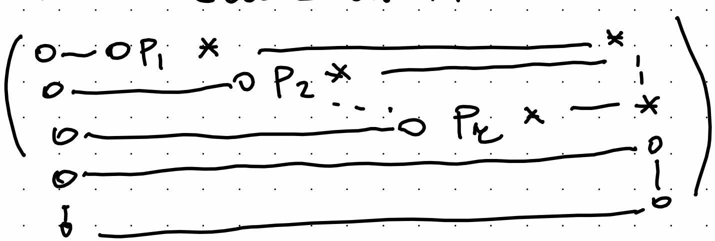
1) Scegliamo una base $\mathcal{B}$ di V, $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$.

2) $F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo lineare

$$F_{\mathcal{B}}(\mathcal{I}) = \{F_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, F_{\mathcal{B}}(v_k)\} \subset \mathbb{K}^n$$

3) Sia $A = \left(F_{\mathcal{B}}(v_1) | \dots | F_{\mathcal{B}}(v_k)\right) \in Mat_{n \times k}(\mathbb{K})$

4) Sia S una forma a scala di A

$A \rightsquigarrow S =$ 

Siano $j_1, j_2, \dots, j_r$ le colonne dominanti di S (ovvero le colonne che contengono i pivot):

Allora una base per $\langle \mathcal{Z} \rangle$ è

$$\{ v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r} \}.$$

<u>Es</u>: $\mathcal{Z} = \{1+x,\ 1+x+x^2,\ 1-x-x^2,\ 1-x+x^2,\ 2-x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

$$F_e(\mathcal{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = S$$

Una base di $\langle \mathcal{Z} \rangle$ è $\{1+x,\ 1+x+x^2,\ 1-x-x^2\}$.

Cambio di base tra basi non-standard.

Sia $V = \mathbb{K}^n$ o $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$.

Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V.

Vogliamo calcolare la matrice di cambiamento di base <u>da</u> $\mathcal{B}_2$ a $\underline{\mathcal{B}_1}$: i.e. la matrice B t.c.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

è commutativo: $B^j = F_{\mathcal{B}_2}(v_j)$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B_1"'] & \mathbb{K}^n & \mathbb{K}^n \arrow[l, "B_2"]
\end{tikzcd}
\Rightarrow \boxed{B = B_2^{-1} B_1}$$

Per calcolare $B = B_2^{-1} B_1$ posso fare così:

$$(B_2 \mid B_1) \rightsquigarrow \operatorname{rref}\big((B_2 \mid B_1)\big) = (\mathbb{1}_n \mid B_2^{-1} B_1)$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

Cerchiamo la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ e da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B^{-1}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

"da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$" "da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$"

$$B = \left(F_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \middle| F_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \right)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Calcoliamo $B_2^{-1} B_1 = B$

$$\left(B_2 \mid B_1 \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo: $5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

$8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

Da B_1 a B_2 : $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)$

$$B^{-1} = \frac{1}{-25+24} \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B}_1 = \{1+x,\ 1-x,\ 1+x+x^2\}$ $\quad \mathcal{B}_2 = \{2,\ 3-2x,\ 2+x^2\}$

basi di $V = \mathbb{R}[x]_{\le 2}$.

Cerchiamo la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $B = B_2^{-1} B_1$ è la matrice cercata.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B_2 \mid B_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim$$

$$\left(B_2 \mid B_1\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \qquad -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Riepilogo: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ lineare, V, W f.g.

1) Per calcolare una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$:

- Trovare basi opportune $\mathcal{B}_V \subset V$ e $\mathcal{B}_W \subset W$
- Trovare la matrice A che rappresenta $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ (in partenza) e $\mathcal{B}_W$ (in arrivo).
- Trovare $R = \operatorname{rref}(A)$ con l'algoritmo di Gauss.
- Calcolare le soluzioni-base $\{b_1, \dots, b_k\}$ di $\operatorname{Ker} R$.

Allora una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ è

$$\{F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(b_1), \dots, F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(b_k)\}.$$

2) Per calcolare $rg(\mathcal{L})$ e una base di $\operatorname{Im}\mathcal{L}$

•) Trovare opportune basi $\mathcal{B}_V \subset V$ e $\mathcal{B}_W \subset W$, con $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$

•) Trovare la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in queste basi.

•) Trovare una forma a scala S di A

•) Trovare i pivot di S e le colonne che li contengono $\{j_1 < j_2 < \dots < j_r\}$.

Allora una base di $\operatorname{Im} A = \{A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_r}\}$

$rg\, A = rg\, \mathcal{L} = r = \#$ pivot di S

Una base di $\operatorname{Im}\mathcal{L}$ è $\{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_r}\}$.

3) Per calcolare l'inversa di $\mathcal{L}$:

- ·) come sopra $\mathcal{B}_V \subset V$ $\mathcal{B}_W \subset W$
- ·) come sopra A

$\mathcal{L}$ è invertibile $\Longleftrightarrow$ A è invertibile.

$$\mathcal{L}^{-1} =$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\mathcal{B}_V"'] & W \arrow[d, "\mathcal{B}_W"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{L}^{-1} = F_{\mathcal{B}_V}^{-1} \circ S_A^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_W}$$

per trovare A^{-1}:

$$(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow (\mathbb{1}_n \mid A^{-1}) = \mathrm{rref}((A) \mathbb{1}_n)).$$

Il determinante

Fissiamo $n \geq 1$ e consideriamo una funzione

$$f : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

Es:

- $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a \qquad f\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = 2$
- $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = abcd \qquad f\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = -24$
- $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a-c \qquad f\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = -1$
- $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad-bc \qquad f\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = 8+3 = 11$

Quindi f è una funzione di n^2 variabili.

Possiamo pensare f come funzione delle <u>righe</u>:

$$f : \underbrace{Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K})}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f(A) = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

oppure possiamo pensare f come f.ne delle colonne

$$f : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f(A) = f(A^1, A^2, \dots, A^n)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f((a,b),(c,d)) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

Def: Una f.ne $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice <u>alternante</u> (oppure anti-simmetrica) sulle <u>righe</u> se cambia segno quando si scambiano due righe:

$$f(P_{ij}A) = -f(A) \qquad \forall i\neq j \quad \forall A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

<u>Es</u>: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right) = a$ non è alternante sulle righe

$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = 1$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = 0 \neq -1.$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right) = a-c$ è alternante sulle righe:

$f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b\end{pmatrix}\right) = c-a = -(a-c) = -f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}.$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right) = ad-bc$ è alternante sulle righe

$f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b\end{pmatrix}\right) = cb-ad = -(ad-bc) = -f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ✓

<u>OSS</u>: Se f è alternante sulle righe, e A ha due righe uguali ($A_i = A_j$ per qualche $i \neq j$)

quanto fa $f(A)$?

$A = P_{ij} A$ Quindi

$$f(A) = f(P_{ij} A) \overset{f \text{ alternante}}{=} -f(A)$$

$\Rightarrow$ $f(A) = 0$.

Def: Una funzione $f : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ pensata come

$$f : Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

si dice multilineare sulle righe se

$\forall\, i = 1, \dots, n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ~~$\forall A_i, B_i \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$ si ha~~

$\forall\, A_1, \dots, A_n, B_i \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$

$$f(A_1, \dots, A_{i-1}, \alpha A_i + \beta B_i, A_{i+1}, \dots, A_n) =$$

$$= \alpha\, f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n) + \beta\, f(A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

Riformulazione: Fissati $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$

la funzione $g_i : Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ data da

$$g_i(X) = f(A_1, \dots, A_{i-1}, X, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

è lineare.

$\underline{Es}$: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a = f((a,b),(c,d))$

$$f(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),(c,d)) = f((\alpha a+\beta a', \alpha b+\beta b'),(c,d))$$

$$= \alpha a + \beta a'$$

$$\alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a',b'),(c,d)) = \alpha a + \beta a'$$

$\Rightarrow$ f è lineare nella prima riga.

$$f((a,b), \alpha(c,d)+\beta(c',d')) = a$$

$$\alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a,b),(c',d')) = \alpha a + \beta a = (\alpha+\beta)a$$

$\Rightarrow$ f non è lineare sulla seconda riga.

$\Rightarrow$ f non è multilineare.

OSS (Importante):

Una f.ne $f: Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è alternante e multilineare sulle righe se e solo se

1) $f(P_{ij} A) = -f(A) \quad \forall\, i \neq j$

2) $f(D_i(\lambda) A) = \lambda f(A) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, i$

3) $f(F_{ij}(c) A) = f(A) \quad \forall\, i, j$

Teorema:

Esiste un'unica funzione $f: Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che

1) $f(P_{ij}A) = -f(A) \quad \forall i \neq j \quad \forall A$
2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall i \ \forall A$
3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A) \quad \forall i,j \ \forall c \in \mathbb{K} \ \forall A$
4) $f(\mathbb{1}_n) = 1$

Questa f.ne si chiama determinante $(n \times n)$ e si denota con

$$\det^{(n)}: Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$