Calcolo dell'inversa : Algoritmo di Inversione (o di Gauss-Jordan)

$A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ è invertibile $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ S_A è invertibile

$\Longleftrightarrow$ $m = n$, $rg\, A = n$

$\Longleftrightarrow$ Le colonne di A formano una base di $\mathbb{K}^m$.

A invertibile $\Longleftrightarrow$ $rref(A) = \mathbb{1}_n$

Infatti, A è invertibile $\Longleftrightarrow$ Le colonne di A formano una base di $\mathbb{K}^m$ $\Longleftrightarrow$ Tutte le colonne di A sono dominanti.

$\exists\, C$ inv. t.c. $CA = rref(A)$ e C è prodotto di matrici elementari.

Se <u>A è invertibile</u>, $CA = \mathbb{1}_n$.

Trovare A^{-1} vuol dire trovare C, ovvero trovare tutte le operazioni elementari utilizzate ~~che tras~~ per trasformare A in $\mathrm{rref}(A) = \mathbb{1}_n$.

$$A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow E_2 E_1 A \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathbb{1}_n$$

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 .$$

Consideriamo la matrice a blocchi:

$$X = (A \mid \mathbb{1}_n) \in \mathrm{Mat}_{n \times 2n}(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{rref}(X) = (\mathbb{1}_n \mid B) = C' (A \mid \mathbb{1}_n) = (C'A \mid C')$$

$$\Leftrightarrow \quad C'A = \mathbb{1}_n \ \text{e} \ C' = B = A^{-1}.$$

Algoritmo di inversione:

$$\left(A \mid \mathbb{1}_n\right) \rightsquigarrow \operatorname{rref}\left(A \mid \mathbb{1}_n\right) = \left(\mathbb{1}_n \mid A^{-1}\right).$$

Es: Calcolare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sol.: Utilizziamo l'algoritmo di inversione:

$$\left(A \mid \mathbb{1}_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\mathbb{1}_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

" A ^ -1 " MATLAB.

Inversa di una matrice 2×2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertibile $\Rightarrow$ $\operatorname{rg} A = 2$.

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Supponiamo $a \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2 \mapsto R_2 - cR_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \mapsto aR_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \underline{ad-bc} & -c & a \end{array}\right)$$

Se $ad-bc=0$ allora $\operatorname{rg} A = 1$ contro l'ipotesi.

Quindi $ad-bc \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \underline{ad-bc} & -c & a \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$R_1 \mapsto R_1 - \frac{b}{a} R_2$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} + \frac{b}{a}\,\frac{c}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{b}{a}\,\frac{c}{ad-bc} = \frac{ad-bc+bc}{a(ad-bc)} = \frac{d}{ad-bc}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Esercizio: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Sia

$$\mathcal{L}: V \longrightarrow V$$

$$p(x) \longmapsto p(x+1) - p(x)$$

$$\mathcal{L}(x^3) = (x+1)^3 - x^3$$

$\mathcal{L}$ è lineare (ovviamente, Esercizio).

Per trovare $\ker \mathcal{L}$ non è conveniente lavorare nella base canonica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Cerchiamo una base migliore:

Consideriamo

$$F: V \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$p(x) \longmapsto \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

Es:

$$F(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad F(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ldots$$

F è lineare (ovviamente, Esercizio!)

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = \lambda\,(x+1)\,x\,(x-1)(x-2)$$

Dato che grado $p(x) \leq 3$, $p(x) = 0 \Rightarrow F$ è iniettiva.

$$F: V \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$p(x) \longmapsto \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo lineare.

Cerchiamo una base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ di V t.c.

$$F = F_{\mathcal{B}}.$$

$$F(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b_1(-1) = 1 \\ b_1(0) = 0 \\ b_1(1) = 0 \\ b_1(2) = 0 \end{cases}$$

$$b_1(x) = \lambda \, x\,(x-1)(x-2) \qquad \Rightarrow b_1(x) = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$1 = b_1(-1) = \lambda(-1)(-2)(-3) \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$$

Analogamente troviamo b_2, b_3, b_4 :

$$\left.\begin{aligned}
b_1(x) &= -\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\
b_2(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} \\
b_3(x) &= -\frac{(x+1)\,x\,(x-2)}{2} \\
b_4(x) &= \frac{(x+1)\,x\,(x-1)}{6}
\end{aligned}\right\}$$

I polinomi di Lagrange associati a $(-1, 0, 1, 2)$

"Interpolazione di Lagrange"

Troviamo la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in questa base

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

$$A = \left(F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(b_1)) \,\middle|\, F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(b_2)) \,\middle|\, F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(b_3)) \,\middle|\, F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(b_4)) \right)$$

$$F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(b_1)) = F\left(b_1(x+1) - b_1(x) \right) = \begin{pmatrix} \cancel{b_1(0)} - b_1(-1) \\ \cancel{b_1(1)} - \cancel{b_1(0)} \\ \cancel{b_1(2)} - \cancel{b_1(1)} \\ b_1(3) - \cancel{b_1(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ b_1(3) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Troviamo una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$:

$$A \rightsquigarrow \operatorname{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\mathcal{L} \subset V \arrow[d, "\simeq"] & V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F"] & V \arrow[d, "F"] \\ \operatorname{Ker} A \subset \mathbb{R}^4 & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

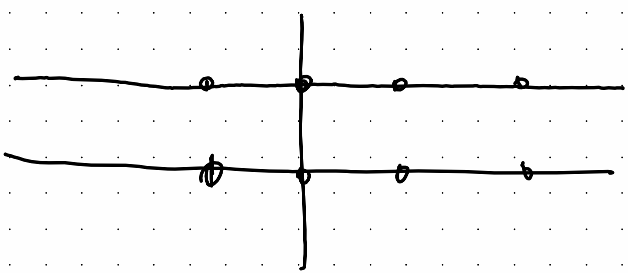
$$F^{-1}(\mathrm{Ker}\,A) = \left\langle F^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right\rangle = \langle b_1+b_2+b_3+b_4 \rangle$$

$$= \langle 1 \rangle$$

$$F^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = p(x) \quad \text{t.c.} \quad \begin{aligned} p(-1) &= 1 \\ p(0) &= 1 \\ p(1) &= 1 \\ p(2) &= 1 \end{aligned}$$

$p(x)$ è un polinomio di grado ≤ 3

che vale 1 su 4 punti distinti.



$p(x) = 1$.

$\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$ = polinomi costanti.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_B"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_B"] & V \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^4 & \mathbb{R}^4 \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^4
\end{tikzcd}
$$

La matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base canonica $e = \{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$B A B^{-1}.$$