1. <u>Domande</u>: Perché vogliamo la base canonica in partenza per poter studiare il nucleo?

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"', "\simeq"] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\operatorname{Ker} B \subset \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{Ker} B \simeq \operatorname{Ker} A$ tramite $F_{\mathcal{B}_1}^{-1}$:

$$\operatorname{Ker} B = \langle \underbrace{v_1, \dots, v_K} \rangle \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \langle F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(v_1), \dots, F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(v_K) \rangle$$

Se $\mathcal{B}_1 = \mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ allora $F_{\mathcal{B}_1} = F_{\mathcal{E}} = Id_{\mathbb{K}^n}$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$$

2. Suggerimento: Dare uno sguardo anche agli appunti di civile.

<u>Richiami</u>: Data $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$

siano $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ le colonne dominanti di A

se estendiamo $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\} \underset{\text{base}}{\subset} Col(A)$ a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^m$ (ci sono infiniti modi di trovare tale $\mathcal{B}$ a meno che $r = m$ nel qual caso $\mathcal{B} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$), la matrice che rappresenta A nella base $\mathcal{B}$ in arrivo e canonica in partenza è una matrice R che fa commutare il diagramma

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \\
\| & & \downarrow F_{\mathcal{B}} = S_C \\
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{R} & \mathbb{K}^m
\end{array}
$$

ed è a scala ridotta. Tale matrice R è <u>unica</u> e si chiama $rref(A)$:

forma a scala ridotta di A o forma di Hermite di A

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} R = \langle b^i \mid i \in [1,n] \setminus \{j_1, \dots, j_r\} \rangle$$

soluzioni-base di $RX=0$

OSS: $R = CA$, C è $m \times m$, invertibile,

$$\mathcal{B} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, v_{r+1}, \dots, v_m\}$$

$$C = \left(A^{j_1} | \dots | A^{j_r} | v_{r+1} | \dots | v_m\right)^{-1}$$

Operazioni elementari sulle righe

I) Scambio di righe "$R_i \leftrightarrow R_j$"

II) Moltiplicazione di una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$

"$R_i \mapsto \lambda R_i$"

III) Rimpiazzare una riga con la somma di tale riga ed un multiplo di un'altra

"$R_i \longmapsto R_i + c R_j$" $\quad (c \in \mathbb{K})$

Data $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ esistono delle operazioni elementari che la trasformano in una matrice a scala ridotta R.

oggi: 1) Vediamo che $R = \mathrm{rref}(A)$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 - R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3 = \mathrm{rref}(A)$

Matrici elementari

Matrici invertibili come f.ni coordinate in una base

Sia $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice invertibile.
Sia $B^{-1} = (v_1 | \dots | v_n)$ la sua inversa.
Allora

$$S_B = F_{\mathcal{B}} \quad \text{dove} \quad \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

dim:

$$S_B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 B^1 + y_2 B^2 + \dots + y_n B^n$$

$$F_{\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$$

$$S_B(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = B(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = B B^{-1} X$$
$$= X = F_{\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$$

Es: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$S_B(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 = (x_1 + 2x_2) e_1 + (-2x_2 e_1 + x_2 e_2)$$

$$= (x_1 + 2x_2) \underbrace{e_1}_{v_1} + x_2 \underbrace{(-2e_1 + e_2)}_{v_2}$$

$\mathcal{B} = \{ v_1 = e_1,\ v_2 = -2e_1 + e_2 \}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

$$F_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = BX = S_B(X).$$ In effetti

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici elementari di tipo I

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(X) \qquad \mathcal{B} = \{e_2, e_1, e_3\}$$

$$F_{\mathcal{B}} = S_B \quad : \quad B = \left(F_{\mathcal{B}}(e_1) \,\middle|\, F_{\mathcal{B}}(e_2) \,\middle|\, F_{\mathcal{B}}(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} BX \qquad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \end{pmatrix} = \left(A^1 \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, A^n \right)$$

$$BA = \left(BA^1 \,\middle|\, BA^2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, BA^n \right)$$ = ottenuta da A scambiando la 1^a e la 2^a riga.

$$A \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} BA$$

Def: Siano $1 \leq i, j \leq m$. Sia $P_{ij}^{(m)}$ la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_m$ scambiando la riga i e la riga j:

$$\mathbb{1}_m \rightsquigarrow P_{i,j}^{(m)}$$

Notazione: Spesso ometteremo la m.

Es: $m = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{1,2}$$

$m = 3$

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$m = 4$:

$$P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

__Prop.__: Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$A \underset{R_i \leftrightarrow R_j}{\rightsquigarrow} P_{ij}A$$

__dim__:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "P_{ij}A"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
\qquad
\mathcal{B} = \{e_1, \dots, \overset{i}{\overset{\downarrow}{e_j}}, \dots, \overset{j}{\overset{\downarrow}{e_i}}, \dots, e_m\}$$

$\blacksquare$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Def: P_{ij} si chiama matrice elementare di Tipo I.

Def: Sia $1 \le i \le m$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.
Sia $D_i(\lambda)$ la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_m$ mediante $R_i \longmapsto \lambda R_i$

$$\mathbb{1}_m \xrightarrow[R_i \mapsto \lambda R_i]{} D_i^{(m)}(\lambda)$$

Es: $m=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto \lambda R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = D_2^{(2)}(\lambda)$$

$m=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto \lambda R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_2^{(3)}(\lambda)$$

$$D_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix} & i \\ \qquad\qquad\quad i & \end{array} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{\lambda}, 1, \ldots, 1)$$

Prop.: Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$A \rightsquigarrow D_i(\lambda) A$$
$$R_i \mapsto \lambda R_i$$

dim:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "D_i(\lambda)A"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
\qquad \mathcal{B} = \{e_1, \dots, \tfrac{1}{\lambda} e_i, \dots, e_m\}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[r, equal, "\mathbb{1}_m"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "D_i(\lambda)"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto i R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4i & 5i & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Def: $D_i(\lambda)$ si chiama matrice elementare di tipo (II).

Def: Siano $1 \le i, j \le m$ e $c \in \mathbb{K}$.
Denotiamo con $F_{i,j}(c)$ la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_m$ eseguendo l'operazione elementare di Tipo III:

$$\mathbb{1}_m \xrightarrow[R_i \mapsto R_i + cR_j]{} F_{ij}^{(m)}(c)$$

Es: $m=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 + cR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = F_{21}(c)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = F_{32}(2)$$

$$F_{ij}(c) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c & \cdots & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} & i \end{array} = \mathbb{1}_m + c\,E_{ij}$$

Prop.: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$A \rightsquigarrow F_{ij}(c)\, A$$

$$R_i \mapsto R_i + c R_j$$

dim:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "F_{ij}(c)A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, ?, \dots, ?, \dots\}$.

Def: $F_{ij}(c)$ si chiama matrice elementare di tipo (III).

Le matrici elementari sono invertibili:

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$F_{ij}(c)^{-1} = F_{ij}(-c)$$

(Esercizio!)

<u>Teorema</u>: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora $rref(A)$ si trova con l'algoritmo di Gauss.

<u>dim</u>: Sia R la matrice a scala ridotta ottenuta da A applicando l'algoritmo di Gauss:

$$A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow E_2 E_1 A \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = R$$

Quindi, posto $C' = E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1$, C' è invertibile e quindi è la f.ne coordinate in una base $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "R"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Per quanto visto ieri $R = rref(A)$. ◻

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = F_{21}(-1)\, F_{31}(-1)\, A$$

$$\underset{\substack{R_1 \mapsto R_1 - R_2 \\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{F_{12}(-1)\, F_{32}(-2)\, F_{21}(-1)\, F_{31}(-1)}_{C}\, A$$

rref

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\,A = \mathrm{rref}(A)$$

$$C = \left(A^{j_1} \mid A^{j_2} \mid v_3 \right)^{-1}$$

Conclusione:

Data $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ esiste una matrice

$C \in Mat_{m \times m}(\mathbb{K})$ invertibile t.c.

$$CA = rref(A)$$

Tale matrice C è prodotto delle matrici elementari che corrispondono alle operazioni elementari da effettuare su A per trasformarla in $rref(A)$.

Per trovare una base di Ker A:

1) Trovare rref(A) con l'algoritmo di Gauss o con "le colonne dominanti" di A

2) Calcolare le soluzioni-base di Ker (rref(A)).