Richiami: Data $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ vogliamo calcolare una base di $\ker A$.

Strategia: Trovare una matrice $R \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ t.c.

1) $\ker R = \ker A$
2) $\ker R$ ha una base facile da calcolare.

Def: Le colonne dominanti di A sono le colonne

$$\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$$

tali che non appartengono allo span delle colonne che le precedono.

Oss: Le colonne dominanti di A, formano una base di $Col(A) = \langle A^1, \dots, A^n \rangle$.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quali sono le colonne dominanti ?

$$\{A^2, A^5, A^7\} \subset \mathbb{R}^3$$

Def: Una matrice $R \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ si dice a scala ridotta o di Hermite se le sue colonne dominanti sono ordinatamente

$$e_1, e_2, \dots, e_r$$

dove $r = rg(R)$.

Es:

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & i & 0 & 1 & 1+i & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2i & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 12 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccccc} & e_1 & & & e_2 & & & e_3 & & \end{array} \end{array}$$ è a scala ridotta

$$\underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2i & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & i & 0 & 1 & 1+i & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 12 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccccc} & e_2 & & & e_1 & & & e_3 & & \end{array} \end{array}$$ **non** è a scala ridotta

Calcolare una base del nucleo di una matrice a scala ridotta è facile:

Es:

$$R = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & i & 0 & 1 & 1+i & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2i & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 12 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccccc} & e_1 & & & e_2 & & & e_3 & & \end{array}\end{array}$$

è a scala ridotta

$$\operatorname{Ker} R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 + i\,x_4 + x_6 + (1+i)x_7 + 7x_9 + 10x_{10} = 0 \\ x_5 + x_6 - 2i\,x_7 + 8x_9 + 11x_{10} = 0 \\ x_8 + 9x_9 + 12x_{10} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 = -2x_3 - i\,x_4 - x_6 - (1+i)x_7 - 7x_9 - 10x_{10} \\ x_5 = -x_6 + 2i\,x_7 - 8x_9 - 11x_{10} \\ x_8 = -9x_9 - 12x_{10} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_2 = -2x_3 - i x_4 - x_6 - (1+i)x_7 - 7x_9 - 10x_{10} \\ x_5 = -x_6 + 2i x_7 - 8x_9 - 11x_{10} \\ x_8 = -9x_9 - 12x_{10} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_3 - i x_4 - x_6 - (1+i)x_7 - 7x_9 - 10x_{10} \\ x_3 \\ x_4 \\ -x_6 + 2i x_7 - 8x_9 - 11x_{10} \\ x_6 \\ x_7 \\ -9x_9 - 12x_{10} \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_9, \\ x_{10} \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$= \left\langle \underset{\text{"}x_1\text{"}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_3\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_4\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_6\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_7\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -(1+i) \\ 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_9\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_{10}\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Sia R una matrice a scala ridotta $m \times n$.

Siano $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$ gli indici dominanti (= gli indici t.c. $R^{j_1}, \ldots, R^{j_r}$ sono le colonne dominanti di R):

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & j_1 & & & & j_2 & & & & j_3 & & i & & \\
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

Sia $X \in \mathbb{K}^n$ un elemento di $\operatorname{Ker} R$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$
\boxed{x_{j_k} = - \sum_{h > j_k} r_{kh} \, x_h} \qquad k = 1, \ldots, r = rg(R) \qquad (*)
$$

Queste sono le r equazioni che definiscono $\operatorname{Ker} R$.

Le variabili

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$$

che corrispondono alle colonne dominanti si chiamano dipendenti o dominanti.

Le rimanenti variabili

$$\{x_i \mid i \in [1,n] \setminus \{j_1, \dots, j_r\}\}$$

$\left([1,n] := \{1, 2, \dots, n\} \right)$ si chiamano indipendenti o libere.

Ad ogni variabile indipendente x_i, associamo la soluzione di $(*)$ ottenuta ponendo

$$x_i = 1 \quad \text{e}$$

$$x_j = 0 \quad \forall j \in [1,n] \setminus \{j_1, \dots, j_r\}, \; j \neq i$$

Chiamiamola b^i.

$$
b^i = \begin{array}{c} \\ \\ j_1 \\ \\ j_2 \\ \\ i \\ \\ j_r \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -r_{1i} \\ \vdots \\ -r_{2i} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\qquad
b^i_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k > i \\ 0 & \text{se } k \notin \{j_1, \dots, j_r\},\ k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \\ -r_{si} & \text{se } k = j_s < i \end{cases}
$$

$$
x_{j_s} = -\sum_{h > j_s} r_{sh} x_h
$$

I vettori $b^1, \dots, b^{n-r}$ si chiamano le <u>soluzioni-base</u> di $\operatorname{Ker} R$ e formano una base di $\operatorname{Ker} R$.

Teorema (Esistenza e unicità di rref(A)):
Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora esiste un'unica matrice R tale che

1) R è a scala ridotta
2) R rappresenta A nella base canonica in partenza.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "R"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

dim: (Esistenza): Sia $\mathcal{B}_{Col(A)} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ la base di $Col(A)$ formata dalle colonne dominanti di A.
Estendiamo $\mathcal{B}_{Col(A)}$ ad una base
$$\mathcal{B} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, v_{r+1}, \dots, v_m\}$$
di $\mathbb{K}^m$.

La matrice che rappresenta A nella base canonica in partenza e nella base $\mathcal{B}$ in arrivo è a scala ridotta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "R"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd} \qquad \mathcal{B} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, v_{r+1}, \dots, v_m\}.$$

$$A = \Big(0 | \dots | 0 | A^{j_1} | \underbrace{* \dots *}_{\langle A^{j_1} \rangle} | A^{j_2} | \underbrace{* \dots *}_{\langle A^{j_1}, A^{j_2} \rangle} | A^{j_3} | \underbrace{* \dots *}_{\langle A^{j_1}, A^{j_2}, A^{j_3} \rangle} | A^{j_r} | * \dots * | A^n\Big) \dots$$

$$R^j = F_{\mathcal{B}}(A e_j) = F_{\mathcal{B}}(A^j)$$

$$R = \Big(0 | \dots | 0 | e_1 | \underbrace{* \dots *}_{\langle e_1 \rangle} | e_2 | \underbrace{* \dots *}_{\langle e_1, e_2 \rangle} | e_3 | \underbrace{* \dots *}_{\langle e_1, e_2, e_3 \rangle} | \dots \Big)$$

quindi R è a scala ridotta.

Unicità: Sia R' a scala ridotta t.c.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "R'"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

per qualche $\mathcal{B}'$ base di $\mathbb{K}^m$. Dimostriamo che

$$R = R'.$$

$$A = \Big(0|\cdots|0|A^{j_1}|\underbrace{*\cdots *}_{\in\langle A^{j_1}\rangle}|A^{j_2}|\underbrace{*\cdots *}_{\langle A^{j_1},A^{j_2}\rangle}|A^{j_3}|\underbrace{*\cdots *}_{\langle A^{j_1},A^{j_2},A^{j_3}\rangle}|\cdots\Big)$$

$$R' = \Big(0|\cdots|0|\underset{\substack{\uparrow\\ i_1}}{e_1}|*\cdots *|\underset{\substack{\uparrow\\ i_2}}{e_2}|\cdots|\underset{\substack{\uparrow\\ i_3}}{e_3}|\cdots\Big)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}' = \{A^{i_1 = j_1}, A^{i_2}, \dots, A^{i_r}, w_{r+1}, \dots, w_m\} \quad \dots \quad \blacksquare$$

Def: R si chiama la forma a scala ridotta di A e si denota con $rref(A)$.

Per trovare R possiamo usare le operazioni elementari sulle righe

Moltiplicare a sinistra ha effetti sulle righe

Moltiplicare a destra ha effetti sulle colonne.

Operazioni elementari sulle righe:

I) Scambio di due righe

$$R_i \longleftrightarrow R_j$$

II) Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$

$$R_i \longmapsto \lambda R_i \qquad (\lambda \neq 0)$$

III) Aggiungere ad una riga un multiplo di un'altra riga

$$R_i \longmapsto R_i + c R_j \qquad (c \in \mathbb{K}).$$

Teorema (Algoritmo di eliminazione di Gauss per il calcolo di una base del nucleo)

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora si possono effettuare opportune operazioni elementari sulle righe di A in modo da ottenere

$$R = rref(A).$$

dim: Se $A = 0_{m \times n}$ allora $R = rref(A) = 0_{m \times n}$. Se $A \neq 0_{m \times n}$.

Passo 1: Sia A^{j_1} la prima colonna di A non-nulla.

Sia n_1 la prima riga tale che

$$A^{j_1}_{n_1} \neq 0.$$

Scambiare la riga n_1 con la riga 1:

$$R_{n_1} \longleftrightarrow R_1$$

$$
\begin{array}{c}
 \qquad j_1 \\
A = \left(\begin{array}{ccc|c|c}
0 & \cdots & 0 & 0 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & & 0 & \\
 & & & c & * \\
 & & & * & \\
 & & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & * &
\end{array}\right) m_1 \\
c \neq 0
\end{array}
\quad \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_{m_1}]{} \quad
\left(\begin{array}{ccc|c|c}
0 & \cdots & 0 & c \neq 0 & \\
 & & & & * \\
 & & & &
\end{array}\right)
$$

Passo 2 : Divido la prima riga per c

$$R_1 \longmapsto \frac{1}{c} R_1 .$$

$$
\begin{array}{c}
i \left(\begin{array}{ccc|c|c}
0 & \cdots & 0 & 1 & \\
 & & & 0 & \\
 & & & \vdots & \\
 & & & 0 & * \\
0 & \cdots & 0 & * & \\
0 & \cdots & 0 & * & \\
 & & & \vdots &
\end{array}\right) =: A \\
j_1
\end{array}
$$

$A_i^{j_1}$

Passo 3 : $\quad R_i \longmapsto R_i - A_i^{j_1} R_1 \qquad \forall\, i \neq 1 .$

$$\rightsquigarrow \left(0|\cdots|0|\underset{\substack{\uparrow\\ j_1}}{e_1}|\underbrace{\ast}_{A'}\right)$$

"Riapplico" i passi 1, 2, 3 alla matrice A' per trovare e_2 (...)

...

$\blacksquare$

Es: Trovare rref(A):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 3 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol.: $j_1 = 2$, $n_1 = 2$

$$\xrightarrow[R_{n_1} \leftrightarrow R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 3 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

[Primo Passo]

$$\xrightarrow[R_1 \mapsto \frac{1}{2} R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 3 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

[Secondo Passo]

$$\xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 5R_1]{} \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

A'

[Terzo passo]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_1 \mapsto R_1 - R_2 \\ R_3 \mapsto R_3 + 2R_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 \mapsto \frac{1}{(-4)} R_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto R_2 - R_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \mathrm{rref}(A).$$