Richiami: $V \supset \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi.

La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ è B quadrata t.c. il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$S_B = F_{\mathcal{B}_2} \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1} \Rightarrow B^i = F_{\mathcal{B}_2}(v_i)$$

dove $\mathcal{B}_1 = \{v_1, .., v_n\}$.

"B^i è composta dalle coordinate di v_i nella base $\mathcal{B}_2$".

$B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ è una matrice di cambiamento di base

$\Updownarrow$

S_B è un isomorfismo.

<u>OSS</u>: $S_B^{-1} = F_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \{B^1, \ldots, B^n\}$.

<u>Def</u>: Una matrice B è invertibile se S_B è invertibile.

In questo la matrice C t.c. $S_C = S_B^{-1}$ si chiama l'inversa di B e si denota B^{-1}.

Es: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Verificare che B è invertibile e calcolare B^{-1}.

Sol.:

B invertibile $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ S_B invertibile

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} B = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} B = \mathbb{R}^2$

$\Longleftrightarrow$ S_B manda basi in basi.

$$\operatorname{Ker} B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ (x_1 + \cancel{x_2}) + x_2 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B \text{ è invertibile}$$

$$\operatorname{Im} B := \operatorname{Col}(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow B \text{ invertibile}$$

S_B: $e_1 \longmapsto B^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_2 \longmapsto B^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\{B^1, B^2\}$ sono una base $\Rightarrow$ B invertibile.

$$B^{-1} = \ ? \ = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_B : & e_1 \longmapsto B^1 \\ & e_2 \longmapsto B^2 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} S_B^{-1} : & B^1 \longmapsto e_1 \\ & B^2 \longmapsto e_2 \end{array}\right]$$

$$S_B^{-1} = S_{B^{-1}} : \quad (B^{-1})^1 = S_{B^{-1}}(e_1) = \ ?$$

$$(B^{-1})^2 = S_{B^{-1}}(e_2) = \ ?$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 B^1 + x_2 B^2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2B^1 - B^2$$

$$S_B^{-1}(e_1) = 2\left(S_B^{-1}(B^1)\right) - S_B^{-1}(B^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -B^1 + B^2$$

$$\Rightarrow S_B^{-1}(e_2) = -S_B^{-1}(B^1) + S_B^{-1}(B^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice associata ad un isomorfismo lineare

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ un isomorfismo lineare.
Sia B una matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in certe basi $\mathcal{B}_V \subset V$ e $\mathcal{B}_W \subset W$.
Com'è fatta B?

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{L}} & W \\ F_{\mathcal{B}_V} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow F_{\mathcal{B}_W} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{S_B} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

$S_B = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}$ è composizione di isomorfismi lineari e quindi è un isomorfismo.

<u>Esercizio</u>: La composizione di f.ni biiettive è biiettiva.

<u>OSS</u>: La matrice nulla $O_{n\times n}$ <u>non</u> è invertibile.

Infatti $\mathrm{Ker}(O_{n\times n}) = \mathbb{K}^n$ e quindi non è nullo. $(n \geq 1)$.

<u>Prop.</u>: Una matrice B è associata ad un isomorfismo lineare se e solo se B è invertibile.

<u>dim</u>: $\Rightarrow$) $S_B = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}$ è composizione di isomorfismi e quindi è un isomorfismo.

$\Leftarrow$) Se B è invertibile, B è una matrice di cambiamento di base e quindi è associata all'identità che è un isomorfismo lineare.

Se A rappresenta $\mathcal{L}$ in due basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "\simeq"', "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

allora $\operatorname{Ker} A \simeq \operatorname{Ker} \mathcal{L}$ $\quad \left(F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{Ker} \mathcal{L} \right)$

e $\operatorname{Im} A \simeq \operatorname{Im} \mathcal{L}$ $\quad \left(F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(\operatorname{Im} A) = \operatorname{Im} \mathcal{L} \right).$

Def: Due f.ni lineari $\mathcal{L}_1 : V_1 \to W_1$ e $\mathcal{L}_2 : V_2 \to W_2$ si dicono *simili* se esistono dei cambiamenti di base (ovvero isomorfismi lineari) $F_1 : V_1 \to V_2$ e $F_2 : W_1 \to W_2$ t.c. il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 \arrow[d, phantom, "\wr"] & \subset & V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_1"', "\simeq"] & W_1 \arrow[d, "\simeq"', "F_2"] & \supset & \operatorname{Im} \mathcal{L}_1 \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\operatorname{Ker} \mathcal{L}_2 & \subset & V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] & W_2 & \supset & \operatorname{Im} \mathcal{L}_2
\end{tikzcd}$$

commuta, i.e. $\mathcal{L}_2 \circ F_1 = F_2 \circ \mathcal{L}_1 \iff \mathcal{L}_2 = F_2 \circ \mathcal{L}_1 \circ F_1^{-1}$

OSS: $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_2 \simeq \operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 \quad (F_1^{-1}(\operatorname{Ker} \mathcal{L}_2) = \operatorname{Ker} \mathcal{L}_1)$

$\operatorname{Im} \mathcal{L}_2 \simeq \operatorname{Im} \mathcal{L}_1 \quad (F_2^{-1}(\operatorname{Im} \mathcal{L}_2) = \operatorname{Im} \mathcal{L}_1)$.

Teorema (di classificazione):

Due f.ni lineari $\mathcal{L}_1 : V_1 \to W_1$ e $\mathcal{L}_2 : V_2 \to W_2$ sono simili se e solo se

$$rg(\mathcal{L}_1) = rg(\mathcal{L}_2), \quad \dim V_1 = \dim V_2, \quad \dim W_1 = \dim W_2.$$

dove $rg(\mathcal{L}) = \dim Im(\mathcal{L})$.

OSS: Siano $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 : V \to W$ lineari.
Allora il Teorema dice

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \iff rg(\mathcal{L}_1) = rg(\mathcal{L}_2).$$

e quindi il rango determina le classi di equivalenza rispetto a $\sim$.

Notazione:

$$[r]_\sim = \{ \mathcal{L} : V \xrightarrow[\text{lineare}]{} W \mid rg(\mathcal{L}) = r \}$$

$$[0]_\sim = \{ 0 \}$$

Se $\dim V \leq \dim W$.

$$[\dim V]_\sim = \{ \mathcal{L} : V \xrightarrow[\text{lineare}]{} W \mid \mathcal{L} \text{ iniettiva} \}$$

Se $\dim V \geq \dim W$

$$[\dim W]_\sim = \{ \mathcal{L} : V \to W \text{ lineare} \mid \mathcal{L} \text{ suriettiva} \}.$$

OSS: $rg(\mathcal{L}) \leq \min(\dim V, \dim W)$ [Esercizio!].

Prop.: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ lineare di rango r. Allora esiste una base $\mathcal{B}_V$ di V ed una base $\mathcal{B}_W$ di W t.c. la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in queste basi è

$$A = \left(e_1 | \dots | e_r | 0 | \dots | 0 \right) \overset{!}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

dim: Scegliamo $\mathcal{B}_V = \{ v_1, \dots, v_r, \overbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}^{\text{base } \operatorname{Ker} \mathcal{L}} \}$ t.c.

$\{ v_{r+1}, \dots, v_n \}$ generano $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$, e

$$\mathcal{B}_W = \{ \underbrace{\mathcal{L}(v_1), \dots, \mathcal{L}(v_r)}_{\substack{\shortparallel \\ \text{base di } \operatorname{Im} \mathcal{L}}}, w_{r+1}, \dots, w_m \}.$$

$\blacksquare$

Es: $m = 3 \quad n = 6 \quad r = 2$

$$A = (e_1 | e_2 | 0 | 0 | 0 | 0) = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es 2 (settimana 4): $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \xrightarrow{L} W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$

$\operatorname{Ker} L = \langle -2v_1 + v_2 + v_3 \rangle \rightsquigarrow \mathcal{B}_V = \{-2v_1 + v_2 + v_3, \underbrace{\boxed{v_1, v_2}}\}$

$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} L} = \{L(v_1), L(v_2)\} \rightsquigarrow \mathcal{B}_W = \{L(v_1), L(v_2), w_1, w_2\}.$

La matrice che rappresenta L in $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Basta scambiare l'ordine degli elementi di } \mathcal{B}_V]{} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dim (Teorema):

$\Rightarrow$) Se $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ allora $\mathrm{Im}(\mathcal{L}_1) \simeq \mathrm{Im}(\mathcal{L}_2)$ e $V_1 \simeq V_2$, $W_1 \simeq W_2$
e quindi $\mathrm{rg}(\mathcal{L}_1) = \mathrm{rg}(\mathcal{L}_2)$, $\dim V_1 = \dim V_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$.

Viceversa, se $\dim V_1 = \dim V_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$, $\mathrm{rg}(\mathcal{L}_1) = \mathrm{rg}(\mathcal{L}_2)$
per la proposizione precedente abbiamo

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "\simeq"'] & W_1 \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)"] & \mathbb{K}^m \\
V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[u, "\simeq"] & W_2 \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 .$$

Matrici associate alla composizione di f.ni lineari: Il prodotto righe per colonne

Siano $\mathcal{L}_1 : V_2 \to V_3$ e $\mathcal{L}_2 : V_1 \to V_2$ due f.ni lineari. La loro composizione è

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 : \begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{L}_3"'] & V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] & V_3 \end{tikzcd}$$

Problema: Se A rappresenta $\mathcal{L}_1$ e B rappresenta $\mathcal{L}_2$ qual'è la matrice che rappresenta $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3$?

Soluzione: È il prodotto righe × colonne di A e B

$$AB \quad \text{"A per B"}$$

Fissiamo basi $\mathcal{B}_1 \subset V_1$, $\mathcal{B}_2 \subset V_2$, $\mathcal{B}_3 \subset V_3$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V_2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"'] & V_3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_3}"] \\ \mathbb{K}^m \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^e \end{tikzcd}$$

Sia C la matrice

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V_3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_3}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_C"] & \mathbb{K}^e \end{tikzcd}$$

Chi è C?

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & V_3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_3}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] \arrow[rr, bend right, "S_C"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^e
\end{tikzcd}
$$

$$S_C = F_{\mathcal{B}_3} \circ \mathcal{L}_3 \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1} = F_{\mathcal{B}_3} \circ (\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2) \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1}$$

$$= F_{\mathcal{B}_3} \circ \mathcal{L}_1 \circ F_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L}_2 \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1}$$

$$= S_A \circ S_B$$

$$S_C = S_A \circ S_B$$

chi è C ?

$$C^i = S_C(e_i) = S_A \circ S_B(e_i) = S_A(B^i) = AB^i$$

$$A \qquad B = \left(B^1 | B^2 | \dots | B^n\right)$$

$$C = \left(AB^1 \,|\, AB^2 \,|\, \dots \,|\, AB^n\right)$$

<u>Def</u>: Il <u>prodotto righe x colonne</u> di A e B è la matrice

$$C =: AB := \left(AB^1 | AB^2 | \dots | AB^n\right).$$

Es:

•) $A = (1, 1, 1)$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1×3 $\qquad$ 3×2

$$AB = \left((1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(1+(-1)+2 \;\middle|\; 1+0+1 \right) = (2, 2)$$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$AB = \left(A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \left(1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

OSS: Se $A \in \mathrm{Mat}_{\ell \times m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
allora

$$AB = \left(AB^1 | \dots | AB^n\right) \in \mathrm{Mat}_{\ell \times n}(\mathbb{K})$$

$\ell \times \cancel{m} \ \cancel{m} \times n$

OSS: Se il numero di righe di B $\neq$

il numero di colonne di A

allora AB *non* è definito.

$$(-1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1(-1) + 2(1) + 3(1) = 4$$

$1 \times \cancel{3} \quad \cancel{3} \times 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$AX := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$$AX := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$$(AX)_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+0 \\ 4-5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$A_i X$ = prodotto pesato:

$$\frac{1}{27} \underset{\text{Geom}}{(9}, \underset{\text{An.}}{9}, \underset{\text{Chim.}}{9}) \begin{pmatrix} 30 \\ 29 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \left(9 \cdot 30 + 9 \cdot 29 + 9 \cdot 18 \right)$$

= Media dei voti.

$$(AB)_i^j = (AB^j)_i = A_i B^j$$

\# colonne A = m

$$= \sum_{k=1} a_{ik} b_{kj}$$

Definizione di prodotto righe x colonne

<u>Es</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+2(3) & 1\cdot 4+2(-7) \\ (-1)(-2)+3\cdot 3 & (-1)4+3(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 11 & -25 \end{pmatrix}$$

MATLAB: il prodotto righe per colonne si fa con $*$.