Richiami: Sia $L: V \to W$ un'applicazione lineare.
Sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e
sia $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W.
La matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_V$ in partenza e $\mathcal{B}_W$ in arrivo è l'unica matrice A che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

i.e. $S_A \circ F_{\mathcal{B}_V} = F_{\mathcal{B}_W} \circ L \iff S_A = F_{\mathcal{B}_W} \circ L \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}$.

$A^i = F_{\mathcal{B}_W}(L(v_i))$: "la i-esima colonna di A è composta dalle coordinate di $L(v_i)$ nella base $\mathcal{B}_W$".

<u>OSS</u> (importante): A serve a calcolare una base di Im L e di Ker L:

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} L \arrow[r, phantom, "\subset"] & V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] & \operatorname{Im} L \\
\operatorname{Ker} A \arrow[u, dashed, "\simeq"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, phantom, "\supset"] & \operatorname{Im} S_A = \operatorname{Col}(A) \arrow[u, dashed, "\simeq"']
\end{tikzcd}
$$

$F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{Ker} L$, $F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(\operatorname{Im} A) = \operatorname{Im} L$.

In particolare, se $\{X_1, \dots, X_k\}$ è una base di Ker A, allora $\{F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_1), \dots, F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_k)\}$ è una base di Ker L.

Similmente, se $\{Y_1, \dots, Y_r\}$ è una base di Im A, allora $\{F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(Y_1), \dots, F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(Y_r)\}$ è una base di Im L.

<u>Es</u>: Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
l'unica f.ne lineare t.c.

$$\mathcal{L}(1-x) = 1+x+x^2$$
$$\mathcal{L}(1+x) = 1+x$$
$$\mathcal{L}(1+x+x^2) = x^2$$
$$\mathcal{L}(1+x^2+x^3) = -1-x$$

Sia $\mathcal{B}_V = \{\underbrace{1-x}_{v_1}, \underbrace{1+x}_{v_2}, \underbrace{1+x+x^2}_{v_3}, \underbrace{1+x^2+x^3}_{v_4}\}$.

e sia $\mathcal{B}_W = \{1, x, x^2\}$.

La matrice associata a $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo una base di Ker A :

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1 + x_2 \quad - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 = 0, \\ x_1 \quad + x_3 \quad = 0. \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} x_2 = x_3 + x_4, \\ x_1 = -x_3 . \end{array} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base di Ker A è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

oss

$\Rightarrow$ Una base di Ker L è

$$\left\{ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F_{\mathcal{B}_V}^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\} = \left\{ -v_1 + v_2 + v_3 ,\; v_2 + v_4 \right\} =$$

$$= \left\{ 1 + 3x + x^2 ,\; 2 + x + x^2 + x^3 \right\}$$

$$\mathrm{Im}\, S_A = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle A^1, A^2, A^3, A^4 \rangle = \langle A^1, A^2 \rangle$$

Una base di $\mathrm{Im}\, S_A$ è $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base di $\mathrm{Im}\, L$ è

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, L} = \left\{ F_{\mathcal{B}_W}^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1 + x + x^2,\ F_{\mathcal{B}_W}^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1 + x \right\}.$$

Matrici associate ad isomorfismi lineari :

Le matrici invertibili

Sia $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ un isomorfismo lineare

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{L}$ è lineare, $\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_V\}$, $\operatorname{Im} \mathcal{L} = W$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{L}$ lineare, $\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_V\}$, $\dim W = \dim V$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{L}$ lineare, "$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \Rightarrow L(\mathcal{B})$ base di W."

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{L}$ lineare, $rg(L) := \dim \operatorname{Im} L = \dim W = \dim V$.

In questo caso l'inversa si denota con $\mathcal{L}^{-1}$.

caso particolare : matrici di cambiamento di base

Def: Sia V uno spazio vettoriale f.g. su $\mathbb{K}$.
Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V.
La matrice B che rappresenta Id_V nelle basi $\mathcal{B}_1$ in partenza e $\mathcal{B}_2$ in arrivo, i.e. B rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

si chiama la <u>matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_2$ alla base $\mathcal{B}_1$</u>.

$$B^i = F_{\mathcal{B}_2} \circ Id_V \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(e_i) = F_{\mathcal{B}_2}(v_i) = \text{" coordinate di } v_i \text{ nella base } \mathcal{B}_2 \text{"}$$

Si dice "da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$" perché:

$$v_1 = b_{11} w_1 + b_{21} w_2 + \dots + b_{n1} w_n$$

$$v_2 = b_{12} w_1 + b_{22} w_2 + \dots + b_{n2} w_n$$

$$\vdots$$

$$v_i = b_{1i} w_1 + b_{2i} w_2 + \dots + b_{ni} w_n$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2i} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{ni} & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Es: $\mathcal{B}_1 = \left\{ \underset{\shortparallel \atop v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\shortparallel \atop v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

basi di $\mathbb{R}^2$.

La <u>matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$</u> è la matrice B 2×2 che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2} = F_e"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

"$=$" = "Id_2"

$\leftarrow$ base canonica!

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(v_1 \,|\, v_2 \right)$$

<u>OSS</u> (Importante): In $\mathbb{K}^n$ ed in $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ ci sono le basi standard o canoniche:

$$\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\} \qquad \mathcal{C} = \{1, x, \dots, x^n\}.$$

Se $V = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, la matrice di cambiamento di base <u>dalla</u> base canonica $\mathcal{C}$ <u>alla</u> base $\mathcal{B}$ è

$$B = (v_1 | \dots | v_n) \quad : \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathcal{B}"'] & \cdot \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\ \cdot \arrow[r, "B"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Se $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ e $\mathcal{B} = \{v_1 = b_{11} + b_{21}x + \dots + b_{n+1,1}x^n, v_2 = b_{12} + b_{22}$
$v_2 = b_{12} + b_{22}x + b_{32}x^2 + \dots + b_{n+1,2}x^n, \dots \}$
la matrice di cambiamento di base <u>da</u> $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\,n+1} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1,1} & b_{n+1,2} & & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathcal{B}"'] & \cdot \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\ \cdot \arrow[r, "B"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B}_1 = \{1+x,\ 1-x\}$ e $\mathcal{C} = \{1, x\}$ basi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

La matrice di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}_1$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathcal{B}"'] & \cdot \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\ \cdot \arrow[r, "B"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

La matrice Identità

La matrice identità è la matrice che rappresenta Id_V nella stessa base $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ in partenza ed arrivo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\mathbb{1}_n"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$$
$$\shortparallel$$
$$\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = (e_1 | e_2 | \dots | e_n) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K}).$$

$$\mathbb{1}_1 = (1), \quad \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Prop.: Sia $B \in Mat_{m \times m}(\mathbb{K})$ quadrata.

B è una matrice di cambiamento di base

$$\Updownarrow$$

S_B è invertibile.

dim: Se B è di cambiamento di base, esiste

$\Downarrow$) uno sp. vettoriale V e due sue basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} \mathrm{Id} \subset & V \arrow[r, "\mathrm{Id}_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\operatorname{Ker} S_B \subset \arrow[u, "\simeq"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

commuta. $\operatorname{Ker} S_B \simeq \operatorname{Ker} \mathrm{Id}_V = \{0_V\}$.

$\Rightarrow S_B$ è un isomorfismo lineare.

$\Uparrow$) Supponiamo che $S_B : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ sia invertibile.

$$Id_{\mathbb{K}^n} = S_B \circ S_B^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "Id_{\mathbb{K}^n}"] \arrow[d, "S_B^{-1}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "Id_{\mathbb{K}^n} = F_e"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$S_B : \begin{array}{l} e_1 \longmapsto B^1 \\ e_2 \longmapsto B^2 \\ \vdots \\ e_n \longmapsto B^n \end{array} \Rightarrow S_B^{-1} : \begin{array}{l} B^1 \longmapsto e_1 \\ B^2 \longmapsto e_2 \\ \vdots \\ B^n \longmapsto e_n \end{array}$$

Poniamo $\mathcal{B} = (B^1, B^2, \dots, B^n)$ base $\mathbb{K}^n$ e quindi

$$F_{\mathcal{B}} = S_B^{-1}$$

Quindi B è una matrice di cambiamento di base. $\square$

Def: Una matrice B si dice invertibile se S_B è invertibile.

La matrice C t.c. $S_B^{-1} = S_C$ si dice l'inversa di B e si denota con

$$B^{-1}.$$

OSS: B invertibile $\Rightarrow$ B è quadrata, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

OSS: Vale anche il viceversa

B invertibile $\Leftarrow$ B è quadrata, $\operatorname{Ker} B = \{0_n\}$

Applicazioni lineari simili.

Siano $\mathcal{L}_1 : V_1 \to W_1$ e $\mathcal{L}_2 : V_2 \to W_2$ due funzioni lineari. Diciamo che <u>$\mathcal{L}_1$ è simile a $\mathcal{L}_2$</u> se esistono isomorfismi lineari $F_1 : V_1 \to V_2$ e $F_2 : W_1 \to W_2$ tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\mathcal{L}_1} & W_1 \\ F_1 \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow F_2 \\ V_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}_2} & W_2 \end{array}$$

commuta, i.e. $\mathcal{L}_2 \circ F_1 = F_2 \circ \mathcal{L}_1$ ovvero $\mathcal{L}_2 = F_2 \circ \mathcal{L}_1 \circ F_1^{-1}$.
Scriviamo

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$$

Esercizio: la similitudine è una relazione di equivalenza:

1) $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_1$ (riflessiva)

2) $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \sim \mathcal{L}_1$ (simmetrica)

3) $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_2 \sim \mathcal{L}_3 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_3$ (transitiva).

Teorema di classificazione

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \iff rg(\mathcal{L}_1) = rg(\mathcal{L}_2),\ \dim V_1 = \dim V_2,\ \dim W_1 = \dim W_2.$$

$\left(rg(\mathcal{L}) := \dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}) \right)$. Il rango è l'unico invariante per similitudine.

Prop.: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ un'applicazione lineare, tra spazi vettoriali f.g.. Allora esiste una base di V $\mathcal{B}_V$ ed una base $\mathcal{B}_W$ di W nelle quali $\mathcal{L}$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$$

dove $r := rg(\mathcal{L})$.

dim: Scegliamo $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_r, \overbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}^{\mathcal{B}_{\ker \mathcal{L}}}\}$ una base di $\mathcal{B}_V$ t.c.

$$\{v_{r+1}, \dots, v_n\} = \text{base di } \ker \mathcal{L}.$$

e $\mathcal{B}_W = \{\mathcal{L}(v_1), \dots, \mathcal{L}(v_r), w_{r+1}, \dots, w_m\}$

Prop.: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ un'applicazione lineare, tra spazi vettoriali f.g.. Allora esiste una base di V $\mathcal{B}_V$ ed una base $\mathcal{B}_W$ di W nelle quali $\mathcal{L}$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{r} & \overbrace{\qquad}^{n-r} \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$$

dove $r := rg(\mathcal{L})$.

dim:

$$\begin{array}{ccc} v_1 & \longrightarrow & \mathcal{L}(v_1) \\ v_2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(v_2) \\ & \vdots & \\ v_r & \longrightarrow & \mathcal{L}(v_r) \\ v_{r+1} & \mathcal{L} & w_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_n & & w_m \end{array}$$

$$A = (e_1 | e_2 | \dots | e_r | 0 | 0 \dots | 0)$$