Richiami:

Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una f.ne lineare,

allora $\exists!$ matrice $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ t.c.

$$\mathcal{L} = S_A$$

moltiplicazione a sinistra per A.

ovvero

$$\mathcal{L}(X) = S_A(X) = AX = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n$$

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{L} = Col(A) = \langle A^1, \dots, A^n \rangle$$

NB: $A^1 = S_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = S_A(e_1)$

$$A^i = S_A(e_i)$$

NB: $F_{\mathcal{B}_V}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Matrice associata ad un'applicazione lineare in una base del dominio ed una base del codominio

Sia $\mathcal{L} : V \to W$ lineare.

Fissiamo una base $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. ($\dim V = n$).

Fissiamo una base $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ di W. ($\dim W = m$).

Otteniamo un diagramma

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, shift right, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, shift right, bend right, "F_{\mathcal{B}_V}^{-1}"'] \arrow[r, dashed] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}$ è lineare

Quindi

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, shift right, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, shift right, bend right, "F_{\mathcal{B}_V}^{-1}"'] \arrow[r, dashed] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}$ è lineare

Quindi esiste una matrice $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ t.c.

$$F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1} = S_A$$

<u>Def</u>: A si chiama <u>la matrice associata</u> (o che rappresenta) a <u>$\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ in partenza e $\mathcal{B}_W$ in arrivo</u>.

Il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

è <u>commutativo</u>, i.e.

$$F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} = S_A \circ F_{\mathcal{B}_V}$$

Com'è fatta A ?

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

$$A^i = S_A(e_i) = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(e_i)$$

$$= F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L}(v_i) = F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{L}(v_i))$$

"L'i-esima colonna di A è composta dalle coordinate di $\mathcal{L}(v_i)$ nella base $\mathcal{B}_W$"

<u>Es</u>: Sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V
e sia $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base di W.
Sia $\mathcal{L}: V \to W$ e' unica f.ne lineare t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = 2w_1 - 3w_2 + w_3 - 4w_4$$

$$\mathcal{L}(v_2) = 2w_2 - 5w_3 + w_4$$

$$\mathcal{L}(v_3) = 2w_3 - w_4$$

Trovare la matrice associata a $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ (in partenza) e $\mathcal{B}_W$ (in arrivo).

<u>Sol.</u>:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^3 \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^4 \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ +1 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perché ci interessa A?

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Ker} \mathcal{L} & \subset & V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & W & \supset & \operatorname{Im} \mathcal{L} \\
\wr\Vert & & \downarrow F_{\mathcal{B}_V} & & F_{\mathcal{B}_W} \downarrow & & \wr\Vert \\
\operatorname{Ker} A & \subset & \mathbb{K}^n & \xrightarrow[S_A]{} & \mathbb{K}^m & \supset & \operatorname{Im} S_A
\end{array}$$

OSS:

$$F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{Ker} \mathcal{L}$$

$$F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(\operatorname{Im} A) = \operatorname{Im} \mathcal{L}$$

Es: $\mathcal{L}$ di prima

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x_1 = 0 \,, \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \,, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \,, \\ -4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \,. \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{ v \in V \mid \mathcal{L}(v) = 0_W \} =$$

$$= \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V \mid x_1 (\mathcal{L}(v_1)) + x_2 (\mathcal{L}(v_2)) + x_3 (\mathcal{L}(v_3)) = 0_W \}$$

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{ v \in V \mid \mathcal{L}(v) = 0_W \} =$$

$$= \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V \mid x_1 (\mathcal{L}(v_1)) + x_2 (\mathcal{L}(v_2)) + x_3 (\mathcal{L}(v_3)) = 0_W \}$$

$$= \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V \mid x_1 (2w_1 - 3w_2 + w_3 - 4w_4) +$$

$$+ x_2 (2w_2 - 5w_3 + w_4) + x_3 (2w_3 - w_4) = 0_W \}$$

$$= \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V \mid (2x_1) w_1 + (-3x_1 + 2x_2) w_2 +$$

$$+ (x_1 - 5x_2 + 2x_3) w_3 + (-4x_1 + x_2 - x_3) w_4 = 0_W \}$$

$$= \left\{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \overset{!}{=} \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0 \}$$

Es: Sia $\mathcal{B} = \left(e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3,\ e_2+e_3\right) \subset \mathbb{R}^3$.

Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

e' unica mappa lineare t.c.

$$f(e_1+e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F_e\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}$ e nella base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Sol.:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ {\scriptstyle F_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F_{\mathcal{E}} = Id_{\mathbb{R}^2}} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{S_A} & \mathbb{R}^2 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es: Sia $\mathcal{B} = \Big(\overset{v_1}{\overset{\shortparallel}{e_1+e_2}},\ \overset{v_2}{\overset{\shortparallel}{e_1+e_2+e_3}},\ \overset{v_3}{\overset{\shortparallel}{e_2+e_3}}\Big) \subset \mathbb{R}^3.$

Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

e' unica mappa lineare t.c.

$$f(e_1+e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad F_e\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base di Ker f.

Sol.:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e = Id_{\mathbb{R}^2}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Ker} f = F_{\mathcal{B}}^{-1} \operatorname{Ker} A = \left\langle F_{\mathcal{B}}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \langle (e_1+e_2) - 2(e_1+e_2+e_3) + (e_2+e_3) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Prop.: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una funzione lineare.
Sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e
$\mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$ una base di W.
Sia A la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$. Allora

$$F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{Ker} \mathcal{L} \quad \text{e} \quad F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(\operatorname{Im} A) = \operatorname{Im} \mathcal{L}.$$

dim:

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rrr, bend left, mapsto] \arrow[d, mapsto] & V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] & \mathcal{L}(v) \arrow[d, mapsto] \\
X \arrow[rrr, bend right, mapsto] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^m & 0_{\mathbb{K}^m}
\end{tikzcd}$$

$S_A \circ F_{\mathcal{B}_V} = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L}$

Esercizio.

$F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(\operatorname{Ker} A) \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{L}$: sia $X \in \operatorname{Ker} A$. Allora

$\mathcal{L}(F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X)) = ?$ $\quad 0_{\mathbb{K}^m} = S_A(X) = F_{\mathcal{B}_W} \mathcal{L} F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X)$

In pratica: per trovare una base di Ker $\mathcal{L}$:

1) Cerchiamo una base $\mathcal{B}_V$ di V e $\mathcal{B}_W$ di W nelle quali la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ è "buona" (= ha molti zeri) A

2) Troviamo una base di Ker A

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\,A} = \{ X_1, \dots, X_k \}$$

3) Una base di Ker $\mathcal{L}$ è

$$\{ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_1), \dots, F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_k) \}$$

Similmente per l'immagine di $\mathcal{L}$.

Es: Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. e sia

$$val_1 : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

la funzione "valutazione in 1" ovvero

$$val_1 (p(x)) = p(1)$$

è lineare (Esercizio!). Trovare la matrice che rappresenta val_1 nella base $\mathcal{B}_V = \{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{1\}$.
Trovare una base di $\mathrm{Ker}(val_1)$.

Sol.: $val_1(2) = 2$ $\quad val_1(1+x) = 2$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "val_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = Id"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$A = (1 \ 1 \ 1)$$

$$\mathrm{Ker}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (1,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sol.:

$\mathrm{val}_1(2) = 2 \qquad \mathrm{val}_1(1+x) = 2$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{val}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_\mathbb{R}} = \mathrm{Id}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (1,1,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B}_{\ker A} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\ker(\mathrm{val}_1)} = \left\{ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F_{\mathcal{B}_V}^{-1}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\}$$

$$= \left\{ -1 + x, -1 + x^2 \right\}$$