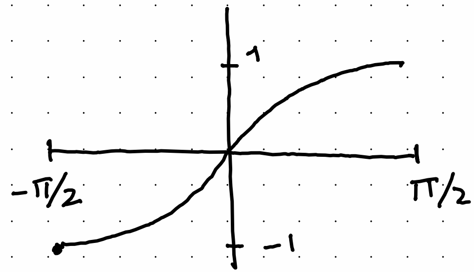
Errata Corrige

$$f = \sin\big|_{[-\pi,\pi]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

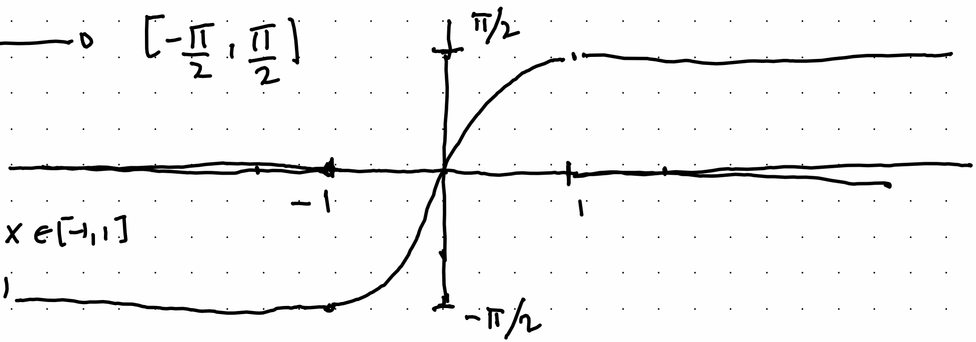
$$\operatorname{Im} f = [-1, 1]$$



$$g : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\parallel$ arcsin(x)

$$g_1 = \begin{cases} \arcsin(x) & x \in [-1,1] \\ -\pi & x \le -1 \\ \pi & x \ge 1 \end{cases}$$



Come sono fatte le applicazioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$?

Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ un' applicazione lineare.

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathcal{L}(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$$

$$= x_1 \mathcal{L}(e_1) + x_2 \mathcal{L}(e_2) + \dots + x_n \mathcal{L}(e_n)$$

$\mathcal{L}$ è lineare

Adesso,

$$\mathcal{L}(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

Sia A la matrice che ha come colonne $\mathcal{L}(e_1), \dots, \mathcal{L}(e_n)$:

$$A = \left(\mathcal{L}(e_1) \,\middle|\, \mathcal{L}(e_2) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \mathcal{L}(e_n) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Notazione: le colonne di A si denotano con

$$A^1, A^2, \dots, A^n$$

$$\boxed{\mathcal{L}(X) = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n}$$

__Definizione__ : Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$
e sia $X \in \mathbb{K}^n$. ~~Il prodotto~~
La moltiplicazione a __sinistra__ di A per X
è il vettore

$$AX := x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n \in \mathbb{K}^m$$

Abbiamo quindi una funzione

$$\begin{aligned} S_A : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

che si chiama "__moltiplicazione a sinistra per A__".

Quindi

$$\mathcal{L} = S_A$$

dove

$$A = \left(\mathcal{L}(e_1) \,\middle|\, \mathcal{L}(e_2) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \mathcal{L}(e_n) \right)$$

Le applicazioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ sono tutte e sole le moltiplicazioni a sinistra per una matrice $m \times n$.

$$\mathrm{Lin}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \{\mathcal{L} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \mid \text{lineare}\} \simeq \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

<u>Esercizio</u>: $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è lineare.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{1\times 3}(\mathbb{R})$

$$S_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{Ker } S_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = -2x_2 - 3x_3 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Im } S_A = \langle 1, 2, 3 \rangle = \mathbb{R} .$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

$$S_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} S_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Ker} S_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Notazione /oss. :

$$\mathrm{Im}\, S_A = \{ x_1 A^1 + \dots + x_n A^n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K} \}$$

$$= \langle A^1, \dots, A^m \rangle =: \mathrm{Col}(A)$$

Quindi $\mathrm{Col}(A)$ denota lo span delle colonne di A.

<u>Es</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

$$S_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Im}\, S_A = \mathrm{Col}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Ker}\, S_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + i x_2 = 0; \\ i x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + i x_2 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Def: Data $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$,

- il nucleo di A è per definizione il nucleo di S_A. $\boxed{Ker(A) := Ker(S_A)}$

- l' immagine di A è per definizione l' immagine di S_A, ovvero lo span delle colonne di A. $\boxed{Im(A) = Col(A)}$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$S_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$Im(A) = \mathbb{R}^3$

dim Im A + dim Ker A = 3

Teorema della dimensione per matrici

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\dim \operatorname{Ker}(A) + \dim \operatorname{Im}(A) = n$$

<u>Def</u>: Il <u>rango</u> di A è la dimensione dell'immagine di A e si denota con $rg(A)$.

$$rg(A) = \dim \operatorname{Im} S_A = \dim \operatorname{Col}(A).$$

Matlab : $A = \mathrm{sym}([a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; \dots; a_{m1}, \dots, a_{mn}])$

Il comando

null(A)

restituisce una matrice che ha per colonne le soluzioni-base di Ker A.

Il comando

rank(A)

restituisce il rango di A.

[m, n] = size(A)

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} x_1 + \quad x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_3) = e_2 + e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3$$

Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$, una base di $\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \operatorname{Ker}(A)$ e di $\operatorname{Im}(\mathcal{L}) = \operatorname{Col}(A)$.

Sol.: $\{e_1+e_2, e_1+e_3, e_2+e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$? Sì.

$$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle e_1+e_2, e_2, e_3 \rangle = \langle e_1+e_2, e_2, e_1+e_3 \rangle$$

$$e_2+e_3 = x_1(e_1+e_2) + x_2 e_2 + x_3(e_1+e_3)$$
$$= (x_1+x_3)e_1 + (x_1+x_2)e_2 + x_3 e_3$$

$x_3 = 1$, $x_1 = -1$ $\quad -1+x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 \neq 0$

$$= \langle e_1+e_2, e_2+e_3, e_1+e_3 \rangle.$$

Es: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_3) = e_2 + e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$, una base di $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ker}(A)$ e di $\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \mathrm{Col}(A)$.

Sol.: $A = \left(\mathcal{L}(e_1) \mid \mathcal{L}(e_2) \mid \mathcal{L}(e_3) \right)$

Chi è $\mathcal{L}(e_1)$? Chi è e_1?

$$e_1 + e_2 - (e_2 + e_3) + (e_1 + e_3) = 2e_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(e_1) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e_1+e_2) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e_2+e_3) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e_1+e_3) =$$
$$= \frac{1}{2}(e_1 - e_3) - \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3) + \frac{1}{2}(e_2+e_3)$$

Es: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_3) = e_2 + e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3$$

Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$, una base di $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ker}(A)$ e di $\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \mathrm{Col}(A)$.

Sol.: $\mathcal{L}(e_1) = -\frac{1}{2} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = A^1$

$e_2 = \,?$ $\quad e_1+e_2-(e_1+e_3)+(e_2+e_3) = 2e_2$

$$\mathcal{L}(e_2) = \frac{1}{2}(e_1-e_3) - \frac{1}{2}(e_2+e_3) + \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3) = e_1 - \frac{1}{2} e_3$$

Es: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_3) = e_2 + e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3$$

Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$, una base di $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ker}(A)$ e di $\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \mathrm{Col}(A)$.

Sol.: $\mathcal{L}(e_1) = -\frac{1}{2} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = A^1$

$\mathcal{L}(e_2) = e_1 - \frac{1}{2} e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = A^2$

$e_3 = ?$ $\qquad e_1+e_3 - (e_1+e_2) + (e_2+e_3) = 2e_3$

$$\mathcal{L}(e_3) = \frac{1}{2}(e_2+e_3) - \frac{1}{2}(e_1-e_3) + \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3) = e_2 + \frac{3}{2} e_3$$

Es: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_3) = e_2 + e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$, una base di $\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \operatorname{Ker}(A)$ e di $\operatorname{Im}(\mathcal{L}) = \operatorname{Col}(A)$.

Sol.:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(e_1) = -\frac{1}{2} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = A^1 \\ \mathcal{L}(e_2) = e_1 - \frac{1}{2} e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = A^2 \\ \mathcal{L}(e_3) = e_2 + \frac{3}{2} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = A^3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A := \operatorname{Col}(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

$$\dim \operatorname{Ker} A = 3 - \operatorname{rg}(A) = 3 - 3 = 0$$

Es: Sia
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$S_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è invertibile?

Sol.:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker} S_A = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow S_A \text{ è iniettiva.} \\ \operatorname{Im} S_A = \mathbb{R}^3 \Rightarrow S_A \text{ è suriettiva} \end{array}\right\} \Rightarrow S_A \text{ è invertibile.}$$

Trovare $B \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ t.c. $S_A^{-1} = S_B$.

$$S_A: \begin{array}{l} e_1+e_2 \longmapsto e_1-e_3 \\ e_1+e_3 \longmapsto e_2+e_3 \\ e_2+e_3 \longmapsto e_1+e_2+e_3 \end{array} \qquad S_B: \begin{array}{l} e_1-e_3 \longmapsto e_1+e_2 \\ e_2+e_3 \longmapsto e_1+e_3 \\ e_1+e_2+e_3 \longmapsto e_2+e_3 \end{array}$$

$$S_B: \begin{array}{l} e_1-e_3 \longmapsto e_1+e_2 \\ e_2+e_3 \longmapsto e_1+e_3 \\ e_1+e_2+e_3 \longmapsto e_2+e_3 \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1 = ?$ $\quad e_1 = (e_1+e_2+e_3) - (e_2+e_3)$

$$S_B(e_1) = S_B(e_1+e_2+e_3) - S_B(e_2+e_3) = e_2+e_3-e_1-e_3$$

$e_2 = ?$ $\quad 2(e_2+e_3)+(e_1-e_3)-(e_1+e_2+e_3) = e_2$

$$B^2 = S_B(e_2) = e_1+e_2+2(e_1+e_3)-(e_2+e_3) = 3e_1+e_3$$

$e_3 = ?$ $\quad e_3 = e_2+e_3-e_2 = (e_2+e_3) - [2(e_2+e_3)+(e_1-e_3)-(e_1+e_2+e_3)]$

$$= -(e_2+e_3)-(e_1-e_3)+(e_1+e_2+e_3)$$

$$B^3 = S_B(e_3) = -(e_1+e_3)-(e_1+e_2)+(e_2+e_3) = -2e_1$$

Comando MATLAB per l'inversa

B = A ^ -1