Funzioni composte

Date due funzioni

$$f : X \longrightarrow Y \quad e \quad g : Y \longrightarrow Z$$

si definisce la funzione composta

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

come

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in X.$$

$\circ$ = "composta" oppure "dopo"

$g \circ f$ = "g composta f" = "g dopo f"

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Es: $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x$

$$g \circ f(x) = 2\sin(x)$$

$$f \circ g(x) = \sin(2x)$$

Esercizio: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

Inverse destra e sinistra

Sia $f: X \to Y$ una funzione.

Una <u>inversa destra</u> di f è una funzione

$$g: Y \to X \quad (X \leftarrow Y : g)$$

tale che

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Y \quad \left(\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \right)$$

Una <u>inversa sinistra</u> di f è una funzione

$$g: Y \to X \quad (X \leftarrow Y : g)$$

tale che

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_X"'] & Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd} \right)$$

Prop.: $f: X \to Y$ ammette inversa destra se e solo se f è suriettiva.

dim:

$\Rightarrow$) Se $f \circ g = Id_Y$ allora $\forall y \in Y$

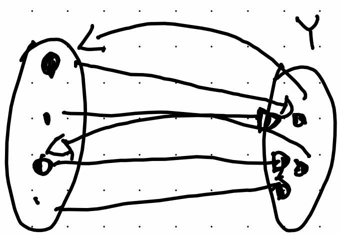
$$y = Id_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$$

Quindi f è suriettiva.

$\Leftarrow$) Se f è suriettive $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

Scegliamo per ogni $y \in Y$ un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

Definiamo $g(Y) = x$.



<u>Prop</u>: $f : X \to Y$ ammette <u>inversa sinistra</u> se e solo se f è <u>iniettiva</u>.

<u>dim</u>:

$\Rightarrow$) $g \circ f = Id_X$.

Se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ e quindi $x_1 = x_2$.

$\Leftarrow$) Se f è iniettiva, $\forall y \in Im(f)$ $\exists !\, x \in X$ t.c. $f(x) = y$. Definiamo

$$g(y) = x. \quad \forall y \in Im(f).$$

Se $y \notin Im(f)$ scegliamo un x qualunque in X e definiamo $g(y) = X$.

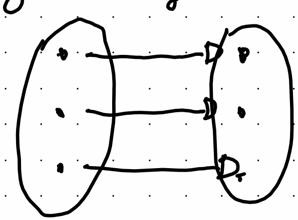
Def : Una funzione $f: X \to Y$ si dice biiettiva o biunivoca se è iniettiva e suriettiva.

Prop. : Una funzione $f: X \to Y$ è biiettiva se e solo se ammette inversa destra e inversa sinistra.

dim : $\Rightarrow$) Se f è biiettiva. Allora
$\forall y \in Y \ \exists! \ x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
Poniamo $x = x_y$. Definiamo $g: Y \to X$ come

$$g(y) = x_y.$$

Allora
$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y \Rightarrow f \circ g = Id_Y$$
$$g \circ f(x_y) = g(f(x_y)) = g(y) = x_y \Rightarrow g \circ f = Id_X$$



$\Leftarrow$) Proposizioni precedenti.

$\blacksquare$

OSS 1: Se f ammette sia inversa destra che sinistra allora le due inverse coincidono.

Infatti, $f \circ g = Id_Y$, $h \circ f = Id_X$

$$g = Id_X \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ Id_Y = h.$$

Def : Una funzione g che è sia inversa destra che sinistra di f si chiama un'inversa di f.

OSS 2: Se f ammette inversa g allora g è unica.

Infatti, se g e h sono inverse di f allora

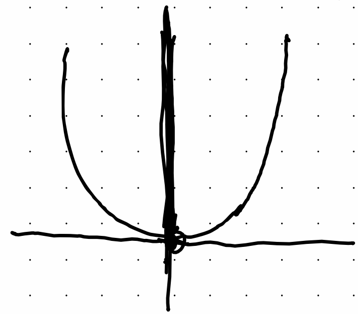
$$g = Id_X \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ Id_Y = h.$$

Notazione: Se f ammette inversa ($\iff f$ è biiettiva) allora la sua inversa si denota con

$$f^{-1}$$

In questo caso si dice che f è invertibile.

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

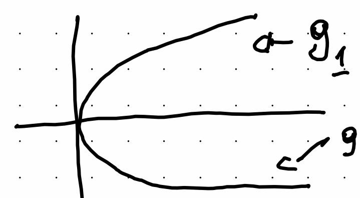


$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}^+$

$f: \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad f(x) = x^2$ è suriettiva.

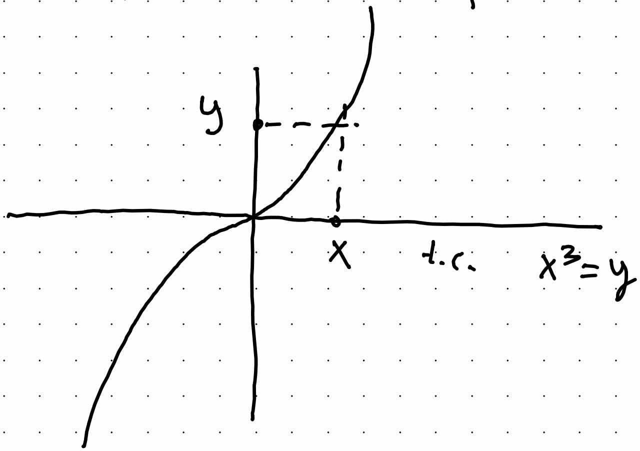
Un'inversa destra di f è $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

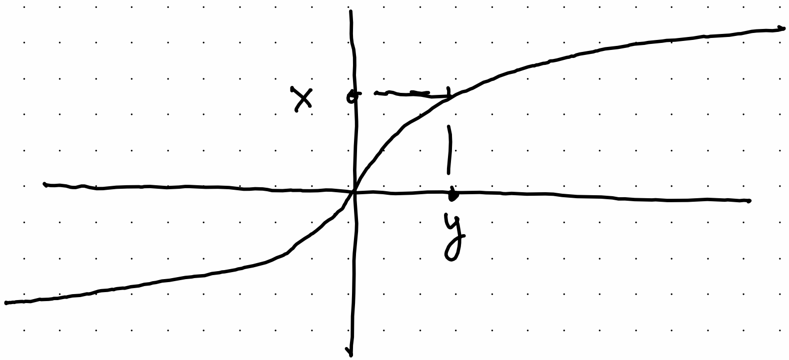
$g_1(x) = \sqrt{x} \geq 0$ oppure $g(x) = -\sqrt{x}$



Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

f è iniettiva e suriettiva.





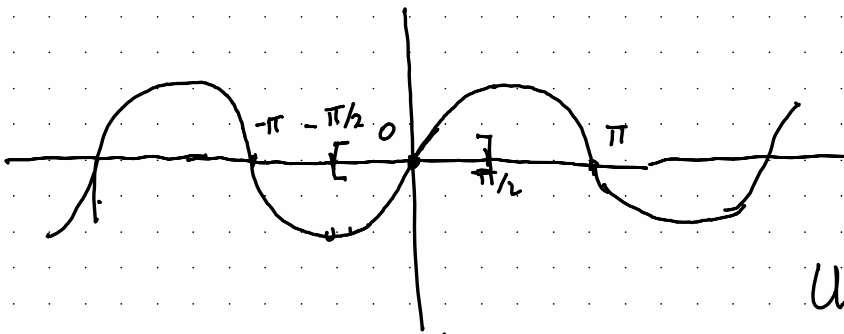
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Notazione : $f : X \to Y$

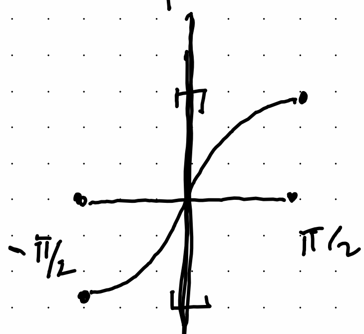
$f : X \hookrightarrow Y$ = f iniettiva.

$f : X \twoheadrightarrow Y$ = f suriettiva.

Es : $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin(x)$ è iniettive.



$f(x) = \sin x.$



Un' inversa sinistra si chiama $g(x) = \arcsin(x)$

Ma non è unica

(Vedi appunti di ven. 23/10).

Proposizione: La composizione di funzioni **lineari** è **lineare**

Dim.: Siano $\mathcal{L}_1 : V \longrightarrow W$ $\mathcal{L}_2 : W \longrightarrow U$ due funzioni lineari (V, W, U sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$).

$\forall v_1, v_2 \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1 (\alpha v_1 + \beta v_2) = \mathcal{L}_2 \left(\mathcal{L}_1 (\alpha v_1 + \beta v_2) \right)$$

$$= \mathcal{L}_2 \left(\alpha \mathcal{L}_1(v_1) + \beta \mathcal{L}_1(v_2) \right)$$

$\mathcal{L}_1$ è lineare

$$= \alpha \mathcal{L}_2 \left(\mathcal{L}_1(v_1) \right) + \beta \mathcal{L}_2 \left(\mathcal{L}_1(v_2) \right)$$

$\mathcal{L}_2$ è lineare

$$= \alpha \left(\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1 \right)(v_1) + \beta \left(\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1 \right)(v_2).$$

$\blacksquare$

<u>Def</u>: Una funzione lineare $\mathcal{L}: V \to W$ invertibile ($\Leftrightarrow$ biiettiva) si chiama un <u>isomorfismo lineare</u>.

<u>Notazione</u>: Se $\mathcal{L}: V \to W$ è un isomorfismo lineare allora scriviamo

$$\mathcal{L}: V \xrightarrow{\cong} W$$

oppure

$$\mathcal{L}: V \xrightarrow{\simeq} W$$

Se esiste un isomorfismo lineare tra V e W diciamo che V e W sono <u>isomorfi</u> e scriviamo

$$V \simeq W$$

<u>Es</u>: $F_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo lineare.

__Teorema__ :

Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{K}^n$

$$V \simeq \mathbb{K}^n$$

__dim__ : Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Allora

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

è un isomorfismo lineare $\boxtimes$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "F_{\mathcal{B}_1}", "\cong"'] & & V_2 \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}_2}"', "\cong"] \\ & \mathbb{K}^n & \end{tikzcd}$$

$\dim V_1 = \dim V_2$

Esiste un isomorfismo lineare tra V_1 e V_2?

Una f.ne biiettiva tra V_1 e V_2 è

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[rr, dashed, "F_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[dr, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & & V_2 \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}_2}"'] \\ & \mathbb{K}^n \arrow[ur, bend right, "F_{\mathcal{B}_2}^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Esercizio: 1) Se $f: X \to Y$ è invertibile allora anche $f^{-1}: Y \to X$ è invertibile.

2) Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ sono biiettive allora anche $g \circ f: X \to Z$ è biiettiva.

$\Rightarrow \quad F_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_1} : V_1 \longrightarrow V_2$ è biiettiva.

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$

$$F_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_1}(v) = F_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$$

Ripasso: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Quindi

$$F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$F_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \longmapsto x_1 w_1 + \dots + x_n w_n .$$

$$\mathcal{B}_1 = \{ v_1, \dots, v_n \} \qquad \mathcal{B}_2 = \{ w_1, \dots, w_n \}$$

$$F_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \longmapsto x_1 w_1 + \dots + x_n w_n .$$

Teorema: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ un isomorfismo lineare. Allora

$$\mathcal{L}^{-1}: W \to V$$

è lineare.

Dim: $\forall w_1, w_2 \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) = ?$$

osserviamo che $\mathcal{L}$ è suriettiva. Quindi $\exists v_1, v_2 \in V$ t.c. $w_1 = \mathcal{L}(v_1)$, $w_2 = \mathcal{L}(v_2)$. Inoltre, v_1 e v_2 sono unici con questa proprietà (perché $\mathcal{L}$ è iniettiva).

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) \overset{\text{suriettività}}{=} \mathcal{L}^{-1}(\alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2)) \overset{\mathcal{L}\text{ lineare}}{=} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2))$$
$$= Id_V(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 \underset{\text{iniettività}}{=} \alpha \mathcal{L}^{-1}(w_1) + \beta \mathcal{L}^{-1}(w_2).$$

$\blacksquare$

COR: Tutti gli spazi vettoriali di dimensione n sono tra loro isomorfi.

dim: $F_{\mathcal{B}_2}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_1} : V_1 \longrightarrow V_2$

è un isomorfismo lineare.

$\blacksquare$

Es: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ che ha una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Sia

$$U = \langle v_1 + 2v_2 \rangle \qquad W = \langle v_2, v_3 \rangle.$$

Dimostrare che $V = U \oplus W$ e calcolare

$$pr_U^W(v)$$

dove $v = 2v_1 + v_2 - v_3$.

Sol.:

1) $\dim U = 1$, $\dim W = 2$, $V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0_V\}$.
Dato che $\{v_1 + 2v_2, v_2, v_3\}$ è lin. ind.
segue che $v_1 + 2v_2 \notin W$ e quindi $U \cap W = \{0_V\}$.

2) Dobbiamo scrivere $v = u + w$ per $u \in U$, $w \in W$
e quindi ottenere $pr_U^W(v) = u$.

Consideriamo la base

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{ \overbrace{v_1 + 2v_2}^{\mathcal{B}_U}, \overbrace{v_2, v_3}^{\mathcal{B}_W} \}$$

Scriviamo v in queste base:

$$v = 2v_1 + v_2 - v_3 = \underbrace{x_1(v_1 + 2v_2)}_{U} + \underbrace{x_2(v_2) + x_3(v_3)}_{W}$$

$$2v_1 + v_2 - v_3 = x_1 v_1 + (2x_1 + x_2) v_2 + x_3 v_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 = 2} \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Quindi $\quad pr_U^W(v) = 2(v_1 + 2v_2) = 2v_1 + 4v_2.$