Richiami: Una funzione $\mathcal{L}: V \to W$ tra due spazi vettoriali V e W su un campo $\mathbb{K}$ si dice lineare se

$$\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2)$$

$\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

- Il nucleo o Kernel di $\mathcal{L}$ è la controimmagine di 0_W:

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{ v \in V \mid \mathcal{L}(v) = 0_W \} \subset V \quad \text{s.sp. vettoriale}$$

- $\mathcal{L}$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{0_V\}$.
- $\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{L}(v) \mid v \in V \} \subset W$ s.sp. vettoriale.
- $\mathcal{L}$ è suriettiva $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = W$.

- Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora la funzione "coordinate nella base $\mathcal{B}$"

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

è lineare.

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ $\qquad \mathcal{B} = \{1, x-1\} \overset{\text{base}}{\subset} V$

$p(x) = 2 + 3x$. Calcoliamo $F_{\mathcal{B}}(p(x)) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$p(x) = a_0 + a_1(x-1).$$

$a_0 = p(1) = 5 \qquad p(x) - a_0 = 3x - 3 = 3(x-1)$

$a_1 = 3$

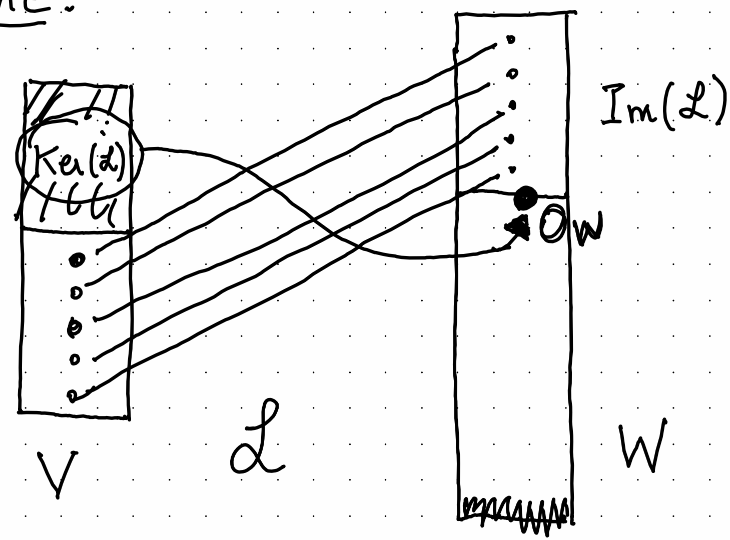
Teorema (della dimensione)

Sia V uno sp. vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$.
Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una funzione lineare.
Allora

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) + \dim \operatorname{Im}(\mathcal{L}) = \dim V}$$

Dimostrazione:

Strategia:



Sia $\mathcal{B}_{Ker(\mathcal{L})} = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $Ker(\mathcal{L})$.
($k = \dim Ker(\mathcal{L})$).

Estendiamo $\mathcal{B}_{Ker(\mathcal{L})}$ ad una base

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

di V.

Dimostriamo che

$$\mathcal{B}_y = \{\mathcal{L}(v_{k+1}), \dots, \mathcal{L}(v_n)\}$$

è una base di $Im(\mathcal{L})$.

1) $\mathcal{B}_y$ è lin. Ind.:

$$x_{k+1}\mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n) = 0_W$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x_{k+1}v_{k+1} + \dots + x_n v_n) = 0_W \Rightarrow x_{k+1}v_{k+1} + \dots + x_n v_n$

$$\mathcal{L}(x_{k+1}v_{k+1} + \dots + x_n v_n) = 0_W .$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \cap \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n = 0_V$$

$$\underset{\uparrow}{\Rightarrow} \qquad x_{k+1} = \dots = x_n = 0$$

$v_{k+1}, \dots, v_n$ sono lin. Ind.

2) $\mathcal{B}_I$ genera $\operatorname{Im}(\mathcal{L})$: Sia $w \in \operatorname{Im}(\mathcal{L})$ allora $\exists\, v \in V$ t.c. $w = \mathcal{L}(v)$.

Scriviamo v nella base $\mathcal{B}$: $v = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n$

$$w = \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \underbrace{x_1 \underset{0_W}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{L}(v_1)}} + \dots + x_k \underset{0_W}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{L}(v_k)}}}_{\shortparallel \atop 0_W} + x_{k+1}\mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n)$$

$$= x_{k+1}\mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n) \in \langle \mathcal{B}_I \rangle . \qquad \blacksquare$$

Es:
$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 2x_1+3x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{ X \mid (2x_1+3x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1+3x_2 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base per $\mathrm{Im}(\mathcal{L})$ è

$$\left\{ \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es: $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}$ è lineare:

$$\mathcal{L}(\alpha X + \beta Y) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha (x_1 + x_3) + \beta (y_1 + y_3) \\ \alpha (x_2 + x_3) + \beta (y_2 + y_3) \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 + y_3 \\ y_2 + y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \mathcal{L}(X) + \beta \mathcal{L}(Y)$$

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

$\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \,?$ Per la formula della dimensione

$$\dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = 3$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{L} \text{ è biiettiva}$$

Una base è $\left\{ \mathcal{L}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{L}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{L}(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Teorema: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Siano $w_1, \dots, w_n \in W$. Allora esiste un'unica funzione lineare $\mathcal{L}: V \to W$ tale che

$$\mathcal{L}(v_1) = w_1, \ \mathcal{L}(v_2) = w_2, \dots, \mathcal{L}(v_n) = w_n. \qquad (*)$$

"Una funzione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base del suo dominio".

Dim: Definiamo $\mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) := x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$.

Questa f.ne così definita è lineare (esercizio!) e $\mathcal{L}(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Si dice che $\mathcal{L}$ <u>estende per linearità</u> la funzione

$$\begin{aligned} v_1 &\longmapsto w_1 \\ v_2 &\longmapsto w_2 \\ &\vdots \\ v_n &\longmapsto w_n . \end{aligned}$$

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

Sia $\mathcal{B} = \{1-x, 1+x, 1+x+x^2\} \overset{\text{base}}{\subset} V$.

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ l'unica f.ne lineare tale che

$$\mathcal{L}(1-x) = x+3$$
$$\mathcal{L}(1+x) = x+2$$
$$\mathcal{L}(1+x+x^2) = x+4$$

Determinare $\mathcal{L}$, Trovare una base di $Ker(\mathcal{L})$ e di $Im(\mathcal{L})$.

<u>Sol.</u>:

$$\mathcal{L}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \, ?$$

$$\mathcal{L}\left(a_0(1-x) + a_1(1+x) + a_2(1+x+x^2)\right) = a_0(x+3) + a_1(x+2) + a_2(x+4)$$

$$= (3a_0 + 2a_1 + 4a_2) + (a_0 + a_1 + a_2)x$$

$$Ker(\mathcal{L}) = \left\{ a_0(1-x) + a_1(1+x) + a_2(1+x+x^2) \;\middle|\; \begin{cases} 3a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{ a_0(1-x) + a_1(1+x) + a_2(1+x+x^2) \;\middle|\; \begin{cases} 3a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \underline{\qquad\qquad} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ 2(a_0 + \cancel{a_1} + a_2) + a_0 + 2a_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \underline{\qquad\qquad} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0 = -2a_2 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ a_0(1-x) + a_1(1+x) + a_2(1+x+x^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0 = -2a_2 \\ a_1 = a_2 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ -2a_2(1-x) + a_2(1+x) + a_2(1+x+x^2) \;\middle|\; a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a_2\left(-2(1-x) + (1+x) + (1+x+x^2)\right) \;\middle|\; a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle -2(1-x) + (1+x) + (1+x+x^2) \rangle$$

$$= \langle 4x + x^2 \rangle$$

$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = 1$

$$\dim \operatorname{Im}(\mathcal{L}) = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} - \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L})$$

$$= 3 - 1 = 2$$

Per determinare una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$:

1) Trovare una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ ✓

2) Estenderla ad una base del dominio

$\mathcal{B}' = \{ 4x + x^2, 1, x \}$

3) Una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ è

$\{ \mathcal{L}(1), \mathcal{L}(x) \}$

$\mathcal{L}(1) = ?$ $\qquad 2 = (1-x)+(1+x)$

$$1 = \frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}(1+x)$$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(1-x)+\frac{1}{2}\mathcal{L}(1+x) = \frac{1}{2}(x+3)+\frac{1}{2}(x+2)$$

$$= x+\frac{5}{2}$$

$\mathcal{L}(x) = ?$ $\qquad x = -\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}(1+x)$

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}(1-x)+\frac{1}{2}\mathcal{L}(1+x) = -\frac{1}{2}(x+3)+\frac{1}{2}(x+2)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Una base per $\mathrm{Im}(\mathcal{L})$ è $\left\{x+\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

Esempio di f.ne lineare: la proiezione su un sottospazio vettoriale lungo un suo supplementare.

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato.
Sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.
Scegliamo un supplementare W di U in V, i.e.

$$U \oplus W = V$$

Quindi, ogni vettore $v \in V$ si scrive in maniera unica come la somma

$$v = u + w$$

di un vettore $u \in U$ e un vettore $w \in W$.

(Presa $\mathcal{B}_U = \{v_1, .., v_k\}$ e $\mathcal{B}_W = \{v_{k+1}, .., v_n\}$ basi di U e W

$$v = \underbrace{x_1 v_1 + .. + x_k v_k}_{u} + \underbrace{x_{k+1} v_{k+1} + .. + x_n v_n}_{w}$$)

Def: La proiezione su U lungo W è la funzione

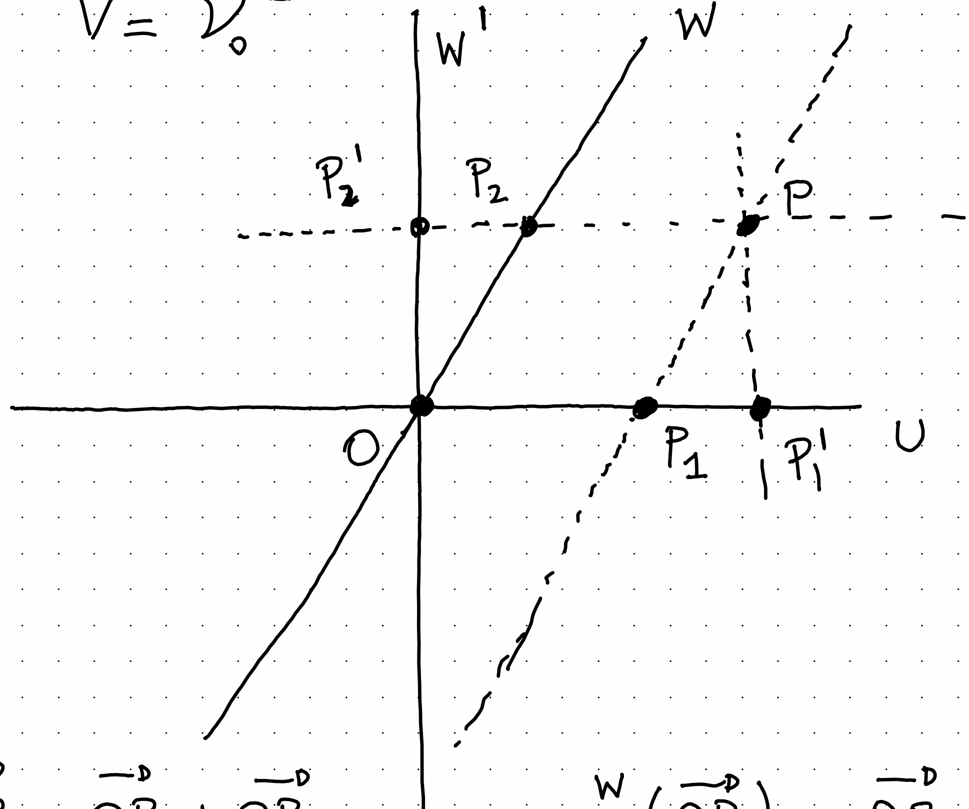
$$pr_U^W : V \longrightarrow V$$
$$u+w \longmapsto u$$

è una funzione lineare (esercizio!).

$$\operatorname{Im} pr_U^W = U$$

$$\operatorname{Ker} pr_U^W = W$$

Es: $V = \mathcal{V}_0^2$



$$\underbrace{\overrightarrow{OP}}_{v} = \underbrace{\overrightarrow{OP_1}}_{u} + \underbrace{\overrightarrow{OP_2}}_{w}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1'} + \overrightarrow{OP_2'}$$

$$pr_U^W(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP_1}$$

$$pr_U^{W'}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP_1'}$$