Funzioni tra spazi vettoriali: Le funzioni lineari.

Def: Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
Una funzione

$$\mathcal{L} : V \longrightarrow W$$

si dice *lineare* (o *applicazione lineare*) se

1) $\mathcal{L}(v_1 + v_2) = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2)$ "$\mathcal{L}$ rispetta le somme"

2) $\mathcal{L}(\alpha v) = \alpha \, \mathcal{L}(v)$ "$\mathcal{L}$ rispetta i prodotti per scalari"

$\forall v_1, v_2 \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

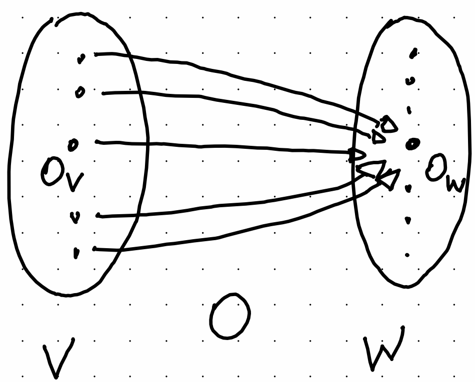
<u>Es</u>: La <u>funzione nulla</u> è la funzione

$$0 : V \longrightarrow W \; : \; 0(v) = 0_W$$

è lineare:

1) $0(v_1+v_2) = 0_W = 0_W + 0_W = 0(v_1)+0(v_2)$

2) $0(\alpha v) = 0_W = \alpha\, 0_W = \alpha\, 0(v)$.



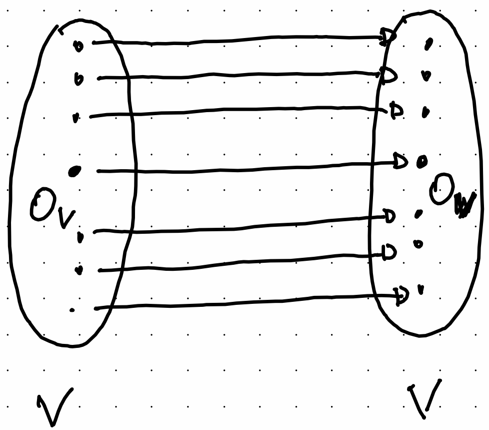
La funzione identità:

$$Id_V = \mathbb{1}_V : V \longrightarrow V : Id_V(v) = v \quad \forall v \in V$$
$$v \longmapsto v$$

è lineare.

1) $Id_V(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = Id_V(v_1) + Id_V(v_2)$

2) $Id_V(\alpha v) = \alpha v = \alpha\, Id_V(v)$.



__OSS__: $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ è lineare se e solo se

$$\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\, \mathcal{L}(v_1) + \beta\, \mathcal{L}(v_2) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall v_1, v_2 \in V$$

__Non-esempio__: Consideriamo la funzione "traslazione di 1"

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f(x) = x+1$$

f non è lineare: $\quad f(1) = 2 \quad f(2) = 3$

$$f(1+1) = f(2) = 3$$

$$f(1) + f(1) = 2+2 = 4$$

Proposizione : Se $\mathcal{L}: V \to W$ è una f.ne lineare allora

$$\mathcal{L}(0_V) = 0_W$$

dimostrazione :

$$\mathcal{L}(0_V) = \mathcal{L}(0\,0_V) \overset{\mathcal{L} \text{ lineare}}{=} 0\,\mathcal{L}(0_V) = 0_W$$

$\blacksquare$

COR : Se $f: V \to W$ è una funzione t.c. $f(0_V) \neq 0_W$ allora f non è lineare.

Es : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \cos(x)$ non è lineare perché $\cos(0) = 1 \neq 0$.

Non esempi:

- $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. non è lineare

$$f(1) = 1 \qquad f(2) = 4 \qquad f(1)+f(1) = 2$$

$$2 = f(1)+f(1) \overset{?}{\neq} f(1+1) = 4$$

$\Rightarrow$ f non è lineare.

- $f(x) = x^3$ $\quad f(1+1) = 8 \neq f(1)+f(1) = 2$

- $f(x) = x^n$ è lineare se e solo se $n=1$

(Esercizio)

Esempio importante di f.ne lineare: Coordinate

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

La funzione "coordinate nella base $\mathcal{B}$"

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

è lineare.

<u>dim</u>: Siano $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \in V$.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$F_{\mathcal{B}}(\alpha v + \beta w) = F_{\mathcal{B}}\big((\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n\big) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha F_{\mathcal{B}}(v) + \beta F_{\mathcal{B}}(w).$$

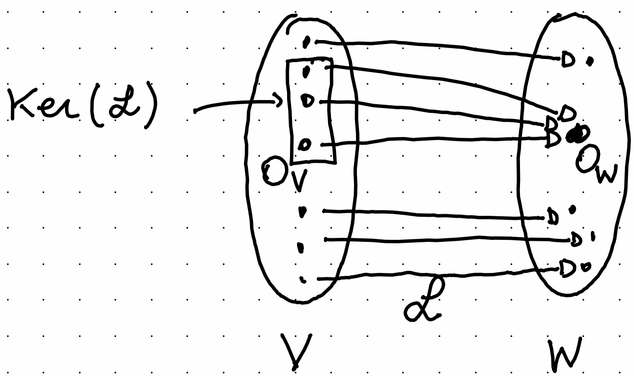
$\blacksquare$

Nucleo di una funzione lineare

Def: Sia $\mathcal{L} : V \to W$ una funzione lineare.
Il nucleo o Kernel di $\mathcal{L}$ è l'insieme

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \mathrm{Null}(\mathcal{L}) = \{ v \in V \mid \mathcal{L}(v) = 0_W \} =$$

$$= \text{"controimmagine di } 0_W\text{"} = \mathcal{L}^{-1}(0_W)$$



<u>Prop.</u>: Il nucleo di un'applicazione lineare

$\mathcal{L} : V \longrightarrow W$

è un sottospazio vettoriale di V.

<u>dimostrazione</u>:

1) $0_V \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L})$, perché $\mathcal{L}$ è lineare.

2) $\forall\, v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{L}\text{ è} \\ \text{lineare}}}{=} \alpha \underbrace{\mathcal{L}(v_1)}_{\substack{\shortparallel \\ 0_W}} + \beta \underbrace{\mathcal{L}(v_2)}_{\substack{\shortparallel \\ 0_W}} = 0_W$$

$\Rightarrow \quad \alpha v_1 + \beta v_2 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L})$. ■

Es: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la f.ne definita come

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che $\mathcal{L}$ è lineare e determinare una base del suo nucleo.

Sol.: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\alpha X + \beta Y) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(2x_1 + 3x_2) + \beta(2y_1 + 3y_2) \\ \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2y_1 + 3y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\, \mathcal{L}(X) + \beta\, \mathcal{L}(Y).$$ Quindi $\mathcal{L}$ è lineare.

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{L}(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Il nucleo di $\mathcal{L}$ è <u>banale</u> = il sottospazio nullo.

<u>Es</u>: • $Id_V : V \longrightarrow V$. $Ker(Id_V) = \{v \in V \mid Id_V(v) = 0_V\}$

$v \longmapsto v$ $= \{0_V\}$

• $0 : V \longrightarrow W$ $Ker(0) = V$

$v \longmapsto 0_W$

• $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$. $Ker(f) = \{0\}$.

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 2x_1+3x_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}$ è lineare :

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (2x_1+3x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}(\alpha X+\beta Y) = 2(\alpha x_1+\beta y_1)+3(\alpha x_2+\beta y_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha(2x_1+3x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta(2y_1+3y_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\,\mathcal{L}(X) + \beta\,\mathcal{L}(Y).$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2$$

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{ X \mid (2x_1+3x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

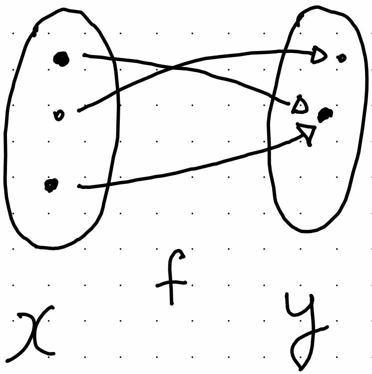
$$= \{X \mid 2x_1+3x_2 = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Richiami: Una funzione $f: X \to Y$ si dice iniettiva se

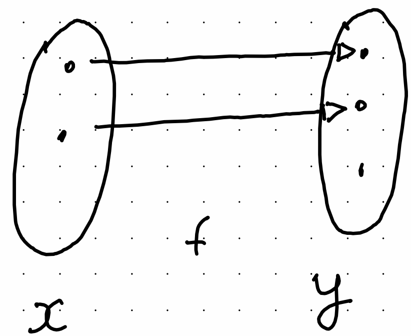
$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

o equivalentemente

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

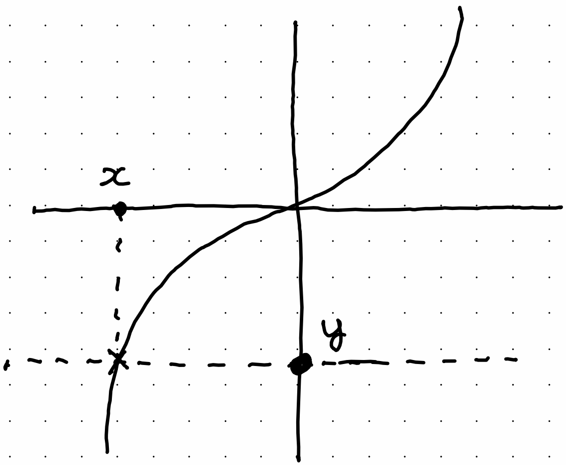


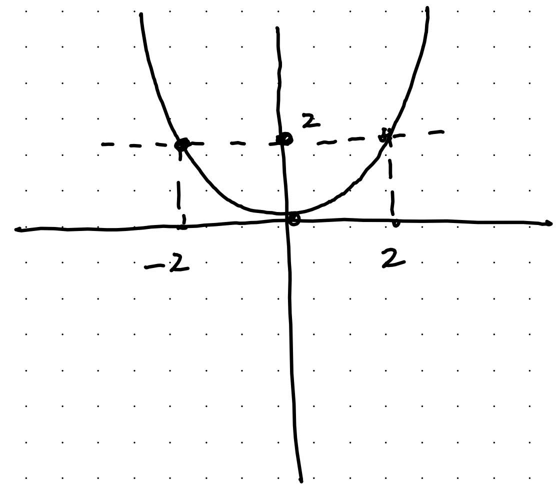
f non è iniettiva



f è iniettiva

Esercizio: Dimostrare che $f(x)=x^3$ è iniettiva.





$f(x)=x^3$

è iniettiva

$f(x)=x^2$

non è iniettiva

$f(2)=f(-2)=4$

Teorema: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una f.ne **lineare**.
Allora

$\mathcal{L}$ è iniettiva $\iff \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{0_V\}$

dimostrazione:

$\Rightarrow$) Se $\mathcal{L}$ è iniettiva e $v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L})$, allora

$$\mathcal{L}(v) = 0_W \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{L} \text{ è} \\ \text{lineare}}}{=} \mathcal{L}(0_V) \underset{\substack{\mathcal{L} \\ \text{iniettiva}}}{\Longrightarrow} v = 0_V .$$

$\Leftarrow$) Se $\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{0_V\}$ e $\mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}(v_2)$ allora

$$\mathcal{L}(v_1) - \mathcal{L}(v_2) = 0_W \overset{\mathcal{L} \text{ lineare}}{\iff} \mathcal{L}(v_1 - v_2) = 0_W$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{0_V\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

$\blacksquare$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 - y^2$

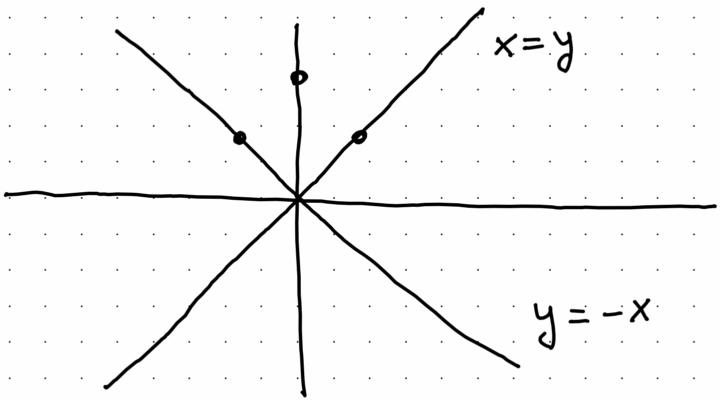
$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)(x+y) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ oppure } y = -x \right\}$$ non è un sottospazio vettoriale

$\Downarrow$

f non è lineare.



Es:

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$ è iniettiva

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (2x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ non è iniettiva.

Immagine di una f.ne lineare

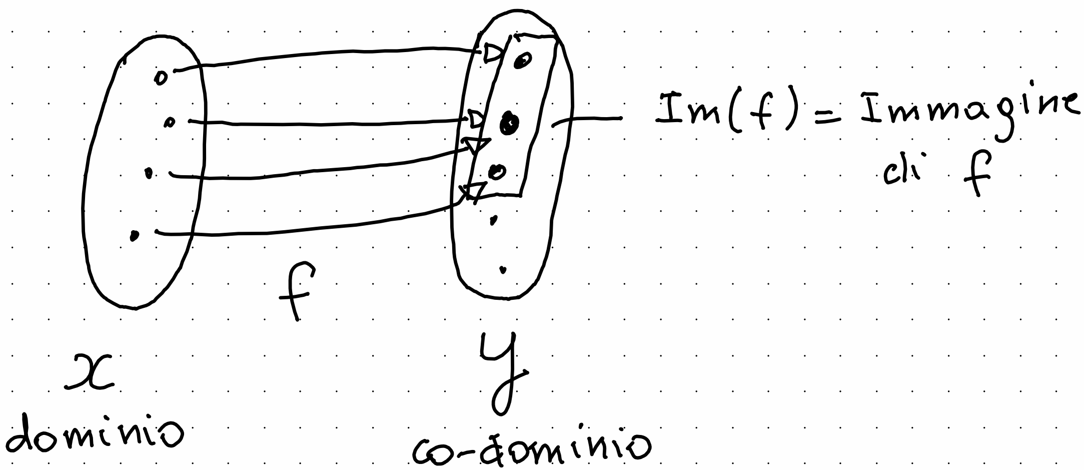
Sia $\mathcal{L} : V \longrightarrow W$ una f.ne lineare.

Denotiamo con

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{L}(v) \mid v \in W \}$$

$$= \{ w \in W \mid \exists\, v \in V : \mathcal{L}(v) = w \}$$

l' immagine di $\mathcal{L}$.



<u>Prop.</u>: Se $\mathcal{L}: V \to W$ è lineare allora $\operatorname{Im}(\mathcal{L})$ è un sottospazio vettoriale di W.

<u>dim</u>: Siano $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}(\mathcal{L})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
Allora $\exists\, v_1, v_2 \in V$ t.c. $w_1 = \mathcal{L}(v_1)$, $w_2 = \mathcal{L}(v_2)$.

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{L} \text{ è} \\ \text{lineare}}}{=} \mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \operatorname{Im}(\mathcal{L})$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$: $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{L}(x) \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Teorema (della dimensione)

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una f.ne lineare.
Se V è finitamente generato, vale la seguente formula

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) + \dim \operatorname{Im}(\mathcal{L}) = \dim V$$