Domanda: Differenza tra "completare" ed "estendere ad una base". Non c'è!

$$\mathcal{I} = \{ v_1, \dots, v_k \} \text{ lin. Ind. di } V, \text{ f.g.}$$

Algoritmo di generazione di basi

$\Rightarrow \exists \; v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ t.c.

$$\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \}$$

è una base di V

Diciamo che $\mathcal{I}$ è stato *completato* alla base $\mathcal{B}$.
oppure diciamo che $\mathcal{B}$ è una base di V ottenuta *estendendo* $\mathcal{I}$.

$W = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ è un *supplemento* o *complemento* di $\langle \mathcal{I} \rangle$: $V = \langle \mathcal{I} \rangle \oplus W$.

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \supset \{1, x, x^2, x^3\}$.

$$\mathcal{B} = \{1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3\}$$

Poiché i gradi degli elementi di $\mathcal{B}$ sono distinti, $\mathcal{B}$ è lin. Ind.

$|\mathcal{B}| = 4 = \dim V$

$$\boxed{P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3.}$$

Trovare $F_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$:

$$p(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1}(x-2) + \underline{a_2}(x-2)^2 + a_3(x-2)^3. \quad (*)$$

Sol.: $a_0 = p(2) = 1 - 4 + 12 - 8 = 1$

$$p(x) - a_0 \underset{(*)}{=} (x-2) \underbrace{\left[a_1 + a_2(x-2) + a_3(x-2)^2\right]}_{q(x)}$$

$a_1 = q(2)$

$$P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3 \, , \qquad a_0 = 1$$

$$p(x) - a_0 = \begin{array}{r|l} -x^3 + 3x^2 - 2x & x - 2 \\ \hline -\,(-x^3 + 2x^2) \qquad\quad & \\ \hline x^2 - 2x & q(x) = -x^2 + x \\ -\,(x^2 - 2x) & \\ \hline // & \end{array}$$

$$a_1 = q(2) = -4 + 2 = -2$$

$$p(x) - a_0 - a_1(x-2) = (x-2)^2 \underbrace{\left[a_2 + a_3 (x-2) \right]}_{q_2(x)}$$

$$a_2 = q_2(2)$$

$$P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3 \,, \quad a_0 = 1 \,, \quad a_1 = -2$$

$$p(x) - a_0 - a_1(x-2) = \cancel{1} - \cancel{2x} + 3x^2 - x^3 - \cancel{1} + \cancel{2x} - 4 =$$

$$
\begin{array}{rl|l}
= & -x^3 + 3x^2 - 4 & x^2 - 4x + 4 \\ \hline
- & -x^3 + 4x^2 - 4x & -x - 1 = q_2(x) \\ \hline
 & -x^2 + 4x - 4 & \\
- & -x^2 + 4x - 4 & \\ \hline
 & // &
\end{array}
$$

$$a_2 = q_2(2) = -3$$

$$P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3 \,, \qquad a_0 = 1 \,, \quad a_1 = -2 \,, \quad a_2 = -3$$

$$p(x) - a_0 - a_1(x-2) - a_2(x-2)^2 =$$

$$\cancel{1} - \cancel{2x} + 3x^2 - x^3 - \cancel{1} + \cancel{2x} - 4 + 3(x^2 - 4x + 4) =$$

$$= -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$$

$$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = -1$$

$$p(x) = 1 - 2(x-2) - 3(x-2)^2 - (x-2)^3 \qquad \blacksquare$$

$$\left(a_K = \frac{d}{dx}^{K} P \Big|_{x=2} \right)$$

Es: $\mathbb{R}^3 \ni e_1, e_2, e_3$.

$\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_3\}$

$\mathcal{B}_2 = \{e_1+e_2, e_1+2e_2+e_3, 2e_1+3e_2+e_3\}$

Stabilire se sono basi.

Sol.:

Lemma Scambio

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_1+e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_1+e_2, e_1+e_3 \rangle$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}_1$ genera $\mathbb{R}^3$ $\underset{|\mathcal{B}_1| = 3 = \dim \mathbb{R}^3}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B}_1$ è una base.

$$x_1 (e_1+e_2) + x_2 (e_1+2e_2+e_3) + x_3 (2e_1+3e_2+e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(x_1+x_2+2x_3) e_1 + (x_1+2x_2+3x_3) e_2 + (x_2+x_3) e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

e_1, e_2, e_3 L.I. $\Longrightarrow$ Lin. Ind.

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ x_2+x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_3 = 0 \\ x_1+x_3 = 0 \\ x_2+x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_2$ è lin. Dip.

Sia $U = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$. Trovare una base di U ed estenderla ad una base di $\mathbb{R}^3$.

$$-\underbrace{(e_1+e_2)}_{= v_1} - \underbrace{(e_1+2e_2+e_3)}_{= v_2} + \underbrace{(2e_1+3e_2+e_3)}_{v_3} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$\Rightarrow v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$

Allora

$$U = \langle \mathcal{B}_2 \rangle \overset{\text{Lemma di Dip. lineare}}{=} \langle \mathcal{B}_2 \setminus \{v_3\} \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Dato che v_2 non è un multiplo di v_1, e $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, concludiamo che $\mathcal{B}_U = \{v_1, v_2\}$ è una base di U.

Estendiamo $\mathcal{B}_U = \{ v_1 = e_1 + e_2,\ v_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \}$

ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Quindi cerchiamo $v_3 \in \mathbb{R}^3$ t.c. $v_3 \notin U$.

$$v_3 = e_3$$

$$e_3 \overset{?}{=} x_1 v_1 + x_2 v_2 = x_1 (e_1 + e_2) + x_2 (e_1 + 2e_2 + e_3)$$

$$= (x_1 + x_2) e_1 + (x_1 + 2x_2) e_2 + x_2 e_3$$

$$e_3 = 0 e_1 + 0 e_2 + 1 e_3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$ Assurdo!

$\Rightarrow e_3 \notin U$ e $\{v_1, v_2, e_3\}$ è una base che completa $\mathcal{B}_U$. $\blacksquare$

Es:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^4 \quad ; \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

1) Determinare una base per U e per W.

2) Calcolare $\dim U \cap W$.

3) Se $\dim U \cap W > 0$, allora trovare una base di $U \cap W$ ed estenderla ad una base di U, di W e di $U+W$.

Sol.: $\mathcal{B}_U = \{ e_1, e_3, e_4 \} \subset U$.

Quindi $\langle \mathcal{B}_U \rangle \subseteq U$, $\dim \langle \mathcal{B}_U \rangle = 3$

Se $\langle \mathcal{B}_U \rangle \subsetneq U$, allora $\dim U = 4$ e quindi $U = \mathbb{R}^4$. Ma $e_2 \notin U$. Contraddizione.

$\Rightarrow \langle \mathcal{B}_U \rangle = U$ e $\dim U = 3$.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^4 \quad ; \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

dato che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. Ind., $2 \leq \dim W \leq 3$.

$\dim W = 2 \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi, $\dim W = 2$ e

$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^4 \; ; \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \subset \mathbb{R}^4.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & U+W & & \\ & \subseteq & & \supseteq & \\ U & & & & W \\ & \supseteq & & \subseteq & \\ & & U \cap W & & \end{array}$$

$$0 \le \dim U \cap W \le 2$$

$$3 \le \dim U + W \le 4$$

$$W \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$$

$$\Rightarrow \quad U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\} \Rightarrow 1 \le \dim U \cap W \le 2$$

Se $\dim U \cap W = 2$ allora $U \cap W = W$.

Ma questo è falso perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin U$ ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$.

Quindi $\dim U \cap W = 1$ ed una sua base è

$$\mathcal{B}_{U\cap W} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1 :=} \right\}$$

OSS: $\dim(U+W) = \underset{3}{\dim U} + \underset{2}{\dim W} - \underset{1}{\dim U \cap W} = 4$

$\Rightarrow \quad U + W = \mathbb{R}^4$.

Estendiamo $\mathcal{B}_{U\cap W}$ ad una base di $U = \{X \mid x_2 = 0\}$

$\langle v_1 \rangle \stackrel{?}{=} U$ No, perché U ha dim. $3 > 1$.

$v_2 = e_3 \in U$, $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$.

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ è lin. Ind. $\quad \langle v_1, v_2 \rangle \stackrel{?}{\neq} U$

$v_3 = e_1 \in U$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Una base di U che estende $\mathcal{B}_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è

$$\mathcal{B}^{U}_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \qquad U\cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B}^{W}_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Estendiamole a basi di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B}^{U,\mathbb{R}^4}_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathcal{B}^{W,\mathbb{R}^4}_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Es: Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Consideriamo il suo grafico:

$$\Gamma_p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ p(x) \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Per quali p, Γ_p è un sottosp. vettoriale?

Sol.: $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

Se Γ_p è un s.sp. vettoriale, allora $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_p$

e quindi $0 = p(0) = a_0$.

$$p(x) = x \underbrace{\left(a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} \right)}_{q(x)} = x\, q(x).$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x\,q(x) \end{pmatrix} \in \Gamma_p \implies \begin{pmatrix} 1 \\ q(x) \end{pmatrix} \in \Gamma_p \quad \forall x \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ q(x) \end{pmatrix} \in \Gamma_p \qquad \forall x \neq 0$$

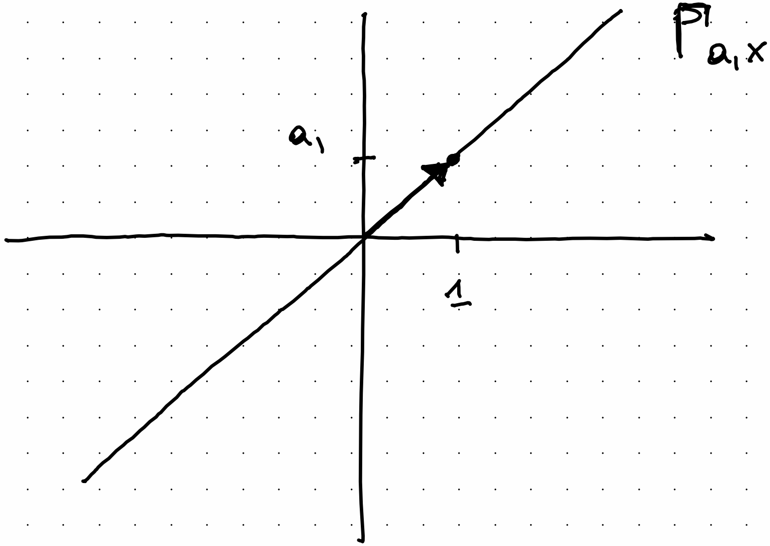
$$\begin{pmatrix} 1 \\ q(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ q(y) \end{pmatrix} \in \Gamma_p \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ q(x)-q(y) \end{pmatrix} \in \Gamma_p.$$

$$\Rightarrow \qquad q(x)-q(y) = p(0) = a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad q(x) = q(y) \qquad \forall x, y$$

$$\Rightarrow \qquad q(x) = a_1 \qquad \forall x. \qquad \Rightarrow \boxed{p(x) = a_1 x}$$



Se $p(x) = a_1 x$ allora

$$\Gamma_p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ a_1 x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$