Richiami:

V f.g. $\Rightarrow \exists\ \mathcal{B} \subset V$ finito, lin. ind. t.c.

$$V = \langle \mathcal{B} \rangle$$

A cosa serve avere una base?

Serve ad avere coordinate.

Coordinate

oss. fondamentale:

Sia $\tau = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme lin. Ind.

Sia $v \in \langle \tau \rangle$.

Allora v si scrive in maniera unica come combinazione lineare degli elementi di τ.

Non-esempio: $\tau = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ non è lin. Ind.

$$v_1 \in \langle \tau \rangle$$

$$v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 = -v_1 + v_2 = 0 v_1 + \frac{1}{2} v_2$$

Oss. fondamentale:

Sia $\tau = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme lin. Ind.

Sia $v \in \langle \tau \rangle$.

Allora v si scrive in maniera unica come combinazione lineare degli elementi di τ.

dim:

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

$$\Rightarrow (x_1 - y_1) v_1 + \dots + (x_n - y_n) v_n = 0_V$$

$$\underset{\substack{\tau \text{ è} \\ \text{lin. Ind.}}}{\Rightarrow} \quad x_1 - y_1 = 0, \; x_2 - y_2 = 0, \; \dots, \; x_n - y_n = 0$$

ovvero $x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Consideriamo la funzione

$$G_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

e la funzione

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base

$$G_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$\forall v \in V \ \exists!\ x \in \mathbb{K}^n$ t.c. $G_{\mathcal{B}}(x) = v$.

$G_{\mathcal{B}}$ è iniettiva $(\exists!)$ ed è suriettiva $(\forall v) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} G_{\mathcal{B}}$ è biiettiva.

$$\left[\begin{array}{l} F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \end{array}\right.$$

$F_{\mathcal{B}}$ è una funzione, per l'oss. fondamentale:
$\forall v \in V \ \exists!\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

$$\mathcal{Z} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F_{\mathcal{Z}} : \; V \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mathcal{Z}}(v_1) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ \vdots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $F_{\mathcal{Z}}$ non è una funzione!

non è ben-definita.

Def: Sia $\mathcal{B}=\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Le <u>coordinate di un vettore $v \in V$ nella base $\mathcal{B}$</u> sono gli unici numeri $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \underline{x_1}\, v_1 + \dots + \underline{x_n}\, v_n .$$

Il <u>vettore delle coordinate di v nella base $\mathcal{B}$</u> è l'unico

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

tale che $\quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n .$

x_i = i-esima coordinata di v nella base $\mathcal{B}$ $(\forall i = 1, \dots, n)$.

La funzione $F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ è la funzione "coordinate nella base $\mathcal{B}$".

Es: $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi di $\mathbb{R}^2$ perché sono lin. Ind.

$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare $F_{\mathcal{B}_1}(v)$ e $F_{\mathcal{B}_2}(v)$, ovvero trovare le coordinate di v nella base $\mathcal{B}_1$ e nella base $\mathcal{B}_2$.

Sol.: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ (x_1 + x_2) + x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Verifichiamo $4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

$$F_{\mathcal{B}_1}(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mathcal{B}_2}(v) = \,?$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 3 - 5/2 = 1/2 \\ x_2 = 5/2 \end{cases}$$

$$F_{\mathcal{B}_2}(v) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Prop.: $F_{\mathcal{B}}$ è ben-definita, iniettiva e suriettiva.

La sua inversa è $G_{\mathcal{B}}$.

dim: $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$G_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

·) $F_{\mathcal{B}}(v) = F_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \Rightarrow v = w$

$\Rightarrow$ $F_{\mathcal{B}}$ è iniettiva.

·) $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $F_{\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = X \Rightarrow F_{\mathcal{B}}$ è suriettiva.

·) $G_{\mathcal{B}} \circ F_{\mathcal{B}}(v) = G_{\mathcal{B}}(X) = v \quad \forall v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$F_{\mathcal{B}} \circ G_{\mathcal{B}}(X) = F_{\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\blacksquare$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$F_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \in \mathbb{K}^n$$

$$\uparrow$$

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

$$F_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = e_i \in \mathbb{K}^n.$$

$$\uparrow$$

$$v_i = 0v_1 + \dots + 0v_{i-1} + \underline{1}v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_n$$

Es: Sia $t \in \mathbb{R}$.

$$U_t := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle ; \quad W_t := \left\langle \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

1) Esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + W_t = \mathbb{R}^4$?
2) Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha che $\dim(U_t \cap W_t) = 1$?
3) Determinare una base di $U_1 \cap W_1$ ed estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Sol.: Se $t = 0$:

$$U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle , \quad W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U_0 = W_0 , \quad \dim U_0 = \dim W_0 = \dim(U_0 \cap W_0) = 1$$

$$\dim(U_0 + W_0) = \dim(U_0) = 1 .$$

$$U_t := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle; \quad W_t := \left\langle \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Se $t \neq 0$,

$$U_t = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_t = \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{t \neq 0}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim U_t = \dim W_t = 2; \quad \dim(U_t + W_t) + \dim(V_t \cap W_t) \overset{\text{Grassmann}}{=} 4$$

$$2 \leq \dim U_t + W_t \leq 4$$

$\dim U_t + W_t$	$\cancel{2}$	3	$\cancel{4}$
$\dim V_t \cap W_t$	$\cancel{2}$ ✓	1	$\cancel{0}$

$$U_t := \left\langle \begin{pmatrix}1\\t\\2t\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\t\\t\\t\end{pmatrix} \right\rangle; \quad W_t := \left\langle \begin{pmatrix}t-2\\-t\\-3t\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\t\\2t\\0\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Se $\dim(U_t \cap W_t) = 2$ allora $U_t = W_t$.

$$\begin{pmatrix}2\\t\\2t\\0\end{pmatrix} \overset{?}{=} x \begin{pmatrix}1\\t\\2t\\0\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}t\\t\\t\\t\end{pmatrix} \underset{t \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} 2 = x + yt \\ t = xt + yt \\ 2t = x2t + yt \\ 0 = yt \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = x \\ t = xt \\ 2t = 2xt \end{cases} \Rightarrow \nexists \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ Assurdo}$$

Quindi, $U_t \neq W_t$. Quindi $\dim U_t \cap W_t \in \{1, 0\}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\dim \{0_V\} = 0}$$

$t \neq 0$.

$$U_t := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle; \quad W_t := \left\langle \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Sia $v \in U_t \cap W_t$. Allora esistono $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$v = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + t x_2 = (t-2) y_1 + 2 y_2 \\ t x_1 + t x_2 = -t y_1 + t y_2 \\ 2t x_1 + t x_2 = -3t y_1 + 2t y_2 \\ t x_2 = t y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \cancel{t x_2} = (\cancel{t}-2)\, y_1 + 2 y_2 \\ t x_1 + t x_2 = -t\, y_1 + t\, y_2 \\ 2t\, x_1 + t\, x_2 = -3t\, y_1 + 2t\, y_2 \\ t\, x_2 = t\, y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 = -2y_1 + 2y_2 \\ t x_1 = -2t y_1 + t y_2 \\ 2t x_1 = -4t y_1 + 2t y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 = -2y_1 + 2y_2 \\ x_1 = -2y_1 + y_2 \\ \cancel{x_1 = -2y_1 + y_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 = -2y_1 + 2y_2 \\ x_1 = -2y_1 + y_2 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 = -2y_1 + 2y_2 \\ x_1 = -2y_1 + y_2 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$t=0 \quad \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 = -2y_1 + 2y_2 \\ 0 = y_2 \end{cases} \qquad t=0 \quad \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 = -2y_1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo:

$$-2y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \overset{?}{=} y_1 \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}$$

Ponendo $y_1 = 1$ otteniamo

$$0_{\mathbb{R}^4} \neq \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} \in U_t \cap W_t \qquad (\forall t \neq 0)$$

Quindi

$$\dim\left(U_t \cap W_t\right) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

(1) NO!

3) $$U_1 \cap W_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Estendere $\{v_1\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\langle v_1 \rangle \neq \mathbb{R}^4, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle v_1 \rangle$$

$\Rightarrow$ $\{v_1, e_1\}$ è lin. Ind.

$$\left\langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \mathbb{R}^4, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, e_1 \rangle$$

$\Rightarrow$ $\{v_1, e_1, e_2\}$ è lin. Ind.

$$\langle v_1, e_1, e_2 \rangle \neq \mathbb{R}^4, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, e_1, e_2 \rangle$$

$\Rightarrow$ $\{v_1, e_1, e_2, e_3\}$ è una base che estende $\{v_1\}$. ∎