Programma del corso "Geometria 1"
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

a.a. 2017/2018

Settimana 1: Lun 25/09: Presentazione del corso. Definizione di matrice. Matrice di adiacenza di un grafo orientato. Definizione di somma di matrici. Matrice nulla. Matrice opposta.

Mar 26/09: Proprietà della somma di matrici. Moltiplicazione per uno scalare e sue proprietà. Matrice di adiacenza di un grafo non-orientato. Definizione di matrice simmetrica.

Merc 27/09: Equazioni lineari. Sistemi lineari. Matrice dei coefficienti di un sistema lineare. Matrice completa di un sistema lineare. Esercizi vari.

Giov 28/09: Sistemi equivalenti. Due matrici si dicono equivalenti per righe se l'una è ottenuta dall' altra mediante operazioni elementari sulle righe. Se due sistemi hanno matrici complete equivalenti allora sono equivalenti. Matrici a scala. Matrici a scala ridotte. Algoritmo di Gauss per la riduzione a scala di una matrice.

Settimana 2: Lun 2/10: Correzione degli esercizi settimanali utilizzando MATLAB. Definizione di rango di una matrice. Le soluzioni di un sistema lineare compatibile mxn con matrice associata di rango r dipendono da n-r parametri. MATLAB: rref(A), equationsToMatrix(eqn1,eqn2), linsolve(A,b), null(A).

Mar 3/10: Unicità della forma a scala ridotta di una matrice (appunti). Definizione di rango di una matrice. 3 possibiità per un sistema lineare: incompatibile, con un'unica soluzione, con infinite soluzioni. Sistemi omogenei. Un sistema omogeneo con numero di ingognite maggiore del numero di equazioni ammette infinite soluzioni. MATLAB: rank(A), [R,j]=rref(A).

Merc 4/10: Utilizzo dei sistemi lineari nell studio di reti di flusso stradale. Utilizzo dei sistemi lineari nello studio di reti elettriche (appunti). Soluzioni base di un sistema omogeneo. Ogni soluzione di un sistema omogeneo è combinazione lineare delle soluzioni base.

Giov 5/10: Esercizi sulle applicazioni ai sistemi elettrici. Soluzioni base di un sistema omogeneo. Esempi. Prodotto scalare tra matrici riga o tra matrici colonna. Prodotto righe per colonne di due matrici (di taglia compatibile).

Settimana 3: Lun 9/10: Matrice identità. Proprietà del prodotto righe per colonne. Potenze di una matrice. Matrici nilpotenti. Esponenziale di una matrice. Correzione degli esercizi settimanali.

Mar 10/10: Teorema di struttura per i sistemi lineari. Moltiplicazione di matrici a blocchi. Potenze della matrice di adiacenza di un grafo orientato.

Merc 11/10: Matrici invertibili ed inversa di una matrice. Inversa di una matrice invertibile di taglia 2x2. Determinante di una matrice 2x2. Se la matrice dei coefficienti di un sistema lineare è invertibile allora il sistema ammette un'unica soluzione. Algoritmo di inversione.

Giov 12/10: Condizioni equivalenti di invertibilità per una matrice quadrata. A è invertibile se e solo è quadrata ed esiste C tale che AC=1; se esiste C tale che AC=1 e CA=1, allora A è quadrata. Inversa di un prodotto; inversa della trasposta. Esercizi sul calcolo dell'inversa tramite algoritmo di inversione.

Settimana 4: Lun 16/10: Lezione introduttiva a MATLAB tenuta dall' Ing. Stefano Olivieri presso la Sala grande del Chiostro della Facoltà di Ingegneria in via Eudossiana 18 dalle 16 alle 19:30.

Mar 17/10: Decomposizione LU ed algoritmo LU. Utilizzo della decomposizione LU di una matrice per la soluzione di un sistema lineare. Decomposizione LU nel caso serva utlizzare uno scambio di righe.

Merc 18/10: Matrici elementari. Inversa di una matrice come prodotto di matrici elementari. Una matrice è invertibile se e solo se è prodotto di matrici elementari. Uso delle matrici elementari per la determinazione del rango di una matrice. Gara di sistemi lineari e correzione.

Giov 19/10: Data una matrice A esistono matrici invertibili T e V tali che il prodotto TAV è uguale alla matrice a blocchi avente come blocco in alto a sinistra la matrice identità di taglia rxr, dove r=rg(A). Algoritmo per determinare matrici T e V con questa proprietà. Esercizi sulla decomposizione LU e sul calcolo dell'inversa.

Settimana 5: Lun 23/10: Vettori geometrici. Uguaglianza di vettori geometrici. Matrice associata ad un vettore geometrico (la matrice delle coordinate in un dato sistema cartesiano). Somma di vettori geometrici. Regola del parallelogramma; metodo punta-coda. Differenza di vettori geometrici. Prodotto di un vettore geometrico per uno scalare. Norma di un vettore geometrico. Interpretazione vettoriale del punto medio tra due punti.

Mar 24/10: Vettori paralleli. Legge dei coseni. Angolo tra due vettori. Vettori ortogonali. Proiezione ortogonale di un vattore su un vettore non-nullo. La proiezione ortogonale di v su d è il vettore parallelo a d più vicino a v (dimostrazione analitica).

Merc 25/10: La proiezione ortogonale di v su d è il vettore parallelo a d più vicino a v (dimostrazione geometrica). Area del triangolo utilizzando la proiezione ortogonale. Equazioni parametriche e cartesiane di una retta nel piano. Seconda gara di sistemi lineari.

Giov 26/10: Distanza punto-retta nel piano. Equazioni parametriche e cartesiane di una retta nello spazio. Equazioni parametriche e cartesiane di un piano nello spazio.

Settimana 6: Lun 30/10: Prodotto vettoriale. Prodotto misto. Distanza punto-piano.

Mar 31/10: Proprietà formali del prodotto vettoriale. Identità di Lagrange. Norma del prodotto vettoriale come area di un parallelogramma. Insiemi convessi: definizione, combinazioni convesse, il più piccolo insieme convesso contenente n punti dati è l'insieme delle combinazioni convesse di tali punti (detto l'inviluppo convesso). (Appunti)

Merc 01/11: Vacanza Accademica

Giov 02/11: Inviluppo convesso, inviluppo affine ed inviluppo lineare di n punti del piano o dello spazio. Un sottoinsieme affine è l'inviluppo affine di n punti ed un sottospazio lineare è l'inviluppo lineare di n punti. Ogni sottoinsieme affine del piano o dello spazio è il traslato di un sottospazio lineare. Centro di massa di un sistema di n particelle di masse variabili nel piano o nello spazio. Descrizione del centro di massa nel caso di masse uguali. Discussione del caso di tre particelle di masse uguali in posizione generica. (Appunti)

Settimana 7: Lun 06/11: Determinanti (definizione tramite lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga). Teorema di Laplace: il determinante è uguale allo sviluppo di Laplace rispetto a qualunque riga e qualunque colonna (senza dimostrazione). Come cambia il determinante effettuando un'operazione elementare sulle righe o sulle colonne.

Mar 07/11: Determinante di una matrice triangolare. Det(1)=1. Una matrice è invertibile se e solo se ha determinante non nullo. Il determinante di kA è $k^n A$, se A è una matrice nxn e k uno scalare. Il determinante non cambia se si effettua la trasposizione. Teorema di Binet o del prodotto. Matrice aggiunta.

Merc 08/11: Formula di aggiunzione e formula per l'inversa di una matrice mediante la sua aggiunta. Formula di Cramer per la soluzione di un sistema quadrato con matrice dei coefficienti invertibile.

Giov 09/11: Esercizi sul determinante. Determinante di una matrice a blocchi triangolare. Soluzioni di alcuni esercizi settimanali. Posizione reciproca di due rette nello spazio. Intersezione tra una retta ed un piano nello spazio.

Settimana 8: Lun 13/11: Il determinante di una matrice 3x3 come prodotto misto delle colonne (o delle righe) della matrice. Il determinante di una matrice 3x3 come volume del parallelepipedo generate dalle colonne (o dalle righe) della matrice. Trasformazioni matriciali del piano. Proiezione e riflessione rispetto ad una retta (per l'origine) di pendenza fissata. Correzione di alcuni esercizi settimanali.

Mar 14/11: Trasformazioni lineari del piano. Una trasformazione del piano è lineare se e solo se è matriciale. Una trasformazione lineare del piano è univocamente determinata dai valori che assume sui vettori di base standard i e j. Matrice associata ad una trasformazione lineare del piano. Rotazioni del piano. Effetto di una trasformazione lineare sul quadrato unitario standard del piano. Esempi: dilatazione e compressione lungo l'asse dellle X; X-taglio positivo e negativo.

Merc 15/11: Determinante di una matrice 2x2 come area (con segno) del parallelogramma delle colonne. Determinante di una matrice 2x2 come quoziente tra l'area del trasformato di un parallelogramma tramite la matrice e l'area del parallelogramma stesso. Composizione di trasformazioni lineari del piano. Inversa di una trasformazione lineare del piano. Computer grafica: realizzazione delle traslazioni come moltiplicazioni per matrici 3x3.

Giov 16/11: Isometrie del piano: una trasformazione lineare del piano è una isometria se e solo se è una rotazione (attorno all'origine) o una riflessione (rispetto ad una retta passante per l'origine). Valutazione del corso OPIS.

Settimana 9: Lun 20/11: Motivazione per la diagonalizzazione: sistemi dinamici lineari (esempio). Potenze di una matrice diagonale. Matrici diagonalizzabili (definizione). Autovettori ed autovalori. Spettro di una matrice e spettro reale. Le matrici triangolari hanno almeno un autovettore reale. La retta generata da un autovettore è stabile per l'azione della matrice. Le rotazioni del piano (diverse da più o meno 1) non hanno autovettori reali. Polinomio caratteristico di una matrice (definizione). Polinomio caratteristico di una matrice 2x2.

Mar 21/11: Polinomio caratteristico di una matrice 3x3 in termini della traccia. Il polinomio caratteristico di una matrice nxn è un polinomio di grado n, avente coefficiente direttore 1, coefficiente di grado n-1 la traccia e termine noto uguale al determinante (senza dimostrazione). Lo spettro di una matrice è l'insieme degli zeri del polinomio caratteristico. Autospazi. Teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione).

Merc 22/11: Vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Una matrice nxn avente n autovalori distinti è diagonalizzabile su R. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. La molteplicità geometrica è minore o uguale della molteplicità algebrica.

Giov 23/11: Ancora su indipendenza lineare in $\mathbb{R}^n$. Basi di $\mathbb{R}^n$. Algoritmo di complentamento ad una base di $\mathbb{R}^n$. Una matrice nxn è diagonalizzabile su R se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ composta di autovettori per la matrice.

Settimana 10: Lun 27/11: Una matrice nxn è diagonalizzabile su R se e solo se lo spettro della matrice è reale e per ogni suo autovalore la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.

Mar 28/11: Teorema fondamentale sulla dimensione. Basi di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Matrici simili (due matrici simili hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e lo stesso polinomio caratteristico). Teorema di Cayley-Hamilton.

Merc 29/11: Sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Basi di sottospazi vettoriali. Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette una base. Il nucleo di una matrice è un sottospazio vettoriale una cui base è composta dalle soluzioni-base del sistema omogeneo associato alla matrice. Complemento ortogonale. Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale è un sottospazio vettoriale.

Giov 30/11: Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è il nucleo di una matrice. Esercitazione dalle 17 alle 19.

Settimana 11: Lun 04/12: Insiemi ortogonali e ortonormali di vettori in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Pitagora. Sviluppo di Fourier (rispetto ad una base ortogonale). Algoritmo di Gram-Schmidt. Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale.

Mar 05/12: Proiezione ortogonale. Decomposizione QR. Soluzioni approssimate di sistemi non risolubili.

Merc 06/12: Interpolazione polinomiale: Polinomio interpolatore di n coppie di dati. Approssimazione ai minimi quadrati: determinazione del polinomio di grado m che meglio approssima n coppie di dati, nel senso dei minimi quadrati. Esempi.

Giov 07/12: Matrici ortogonali. Teorema degli assi principali (o Teorema spettrale reale).

Settimana 12: Lun 11/12: Valori singolari di una matrice mxn. Decomposizione ai valori singolari di una matrice mxn. Norma di una matrice m-n. Quoziente di Rayleigh di una matrice simmetrica. La norma di una matrice è uguale al più grande valore singolare della matrice. Data una matrice mxn di rango r, esiste una matrice di rango k (per ogni 0¡k¡r+1) che meglio approssima la matrice data in termini della norma di una matrice; tale matrice ha un'espressione esplicita in termini dei valori singolari e di un abase ortonormale di autovettori per ${}^tAA$ e per A^tA (senza dimostrazione).

Mar 12/12: Forme quadratiche. Matrice (simmetrica) associata ad una forma quadratica. Forme quadratiche definite positive, semin-definite positive, definite negative, semidefinite negative, indefinite. Una matrice simmetrica (o la corrsipondente forma qudratica) è definita positiva se e solo se ha tutti gli autovalori positivi. Una matrice simmetrica è definita positiva se e solo se i minori principali (ovvero i determinanti delle sottomatrici principali) sono positivi (senza dimostrazione). Quadriche: una quadrica in $\mathbb{R}^n$ è il luogo degli zeri di un polinomio di grado due in n variabili. Una conica è il luogo degli zeri di un polinomio di grado due in due variabili. Forma canonica affine delle coniche. Forma canonica affine delle quadriche di $\mathbb{R}^3$ (scheda).

Merc 13/12: Classificazione affine delle coniche.

Giov 14/12: Due esempi di riduzione a forma canonica affine (un' iperbole ed una parabola). Definizione di spazio vettoriale. Esempi di spazi vettoriali: $\mathbb{R}^n$, i polinomi in una variabile, i polinomi di grado al più n in una variabile, le funzione continue da un intervallo di R ad R. Cancellazione. L'inverso è unico. Lo zero è unico.

Settimana 13: Lun 18/12: Sottospazi vettoriali. Dipendenza ed indipendenza lineare. Basi. L'espansione di un vettore rispetto ad una base è unica. Funzione "coefficienti rispetto ad una base" che associa ad ogni vettore la n-pla ordinata delle sue coordinate in una base data. Teorema fondamentale sull'indipendenza (se V ha m generatori, allora dati comunque n vettori di V con $n > m$ essi sono linearmente dipendenti). Dimensione. Le funzioni {cos(mx)} sono linearmente indipendenti (in particolare lo spazio delle funzioni da [0,2pi] ad R non ammette una base). Un insieme di polinomi di gradi diversi è linearmente indipendente. Teorema di completamento ad una base. Una base è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti.

Mar 19/12: Trasformazioni lineari. Nucleo ed immagine di una trasformazione lineare. Una trasformazione lineare è iniettiva se e solo se ha nucleo banale. Teorema delle dimensioni. Una trasformazione lineare tra spazi della stessa dimensione è iniettiva se e solo se è iniettiva. Uno spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$.

Merc 20/12: Una trasformazione lineare è un isomorfismo se e solo se manda basi in basi. Una trasformazione lineare è un isomorfismo se e solo se ammette un'inversa. Matrice associata ad una trasformazione lineare, rispetto alla scelta di due basi (una in partenza ed una in arrivo). Nel caso la trasformazione lineare sia l'identità, tale matrice si chiama matrice del cambiamento di base.

Giov 21/12: Definizione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare si chiama spazio metrico. Coefficienti di Fourier. Angolo tra vettori di uno spazio metrico. Prodotto scalare interno (indotto da una base). I prodotti scalari di $\mathbb{R}^n$ sono indotti da matrici simmetriche definite positive.