Unicità di rref(A)

October 3, 2017

Teorema 0.1. *Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(\mathbf{R})$ esiste un'unica matrice a scala ridotta equivalente per righe ad A. La denotiamo con rref(A).*

Dimostrazione: Riduciamo a scala la matrice A tramite l'algoritmo di Gauss. Procedendo "all'indietro" da tale matrice a scala possiamo ottenere una matrice a scala ridotta. Questo dimostra l'esistenza.

Dimostriamo l'unicità. Siano R ed S due matrici a scala ridotte equivalenti per righe ad A. Dobbiamo dimostrare che $R = S$. Se $A = 0_{m,n}$ allora $R = S = 0_{m,n}$, poichè le operazioni elementari sulle righe non permettono di trasformare righe nulle in righe non–nulle.

Assumiamo quindi che $A \neq 0_{m,n}$. Supponiamo, per assurdo, che $R \neq S$. Allora esiste un indice di colonna h tale che $R^h \neq S^h$ e minimo rispetto a questa proprietà, ovvero $R^i = S^i$ per ogni $i = 1, \cdots, h-1$. Siano $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t < h$ gli indici di colonna contenenti gli 1–dominanti che si trovano a sinistra della colonna h–esima. Consideriamo le matrici $m \times (t+1)$

$$\overline{R} = (R^{j_1}\, R^{j_2}\, \cdots\, R^{j_t}\, R^h) \quad \overline{S} = (S^{j_1}\, S^{j_2}\, \cdots\, S^{j_t}\, S^h)$$

aventi come colonne le colonne dominanti alla sinistra dell'h–esima e la colonna h–esima stessa. Per cui $\overline{R}$ ed $\overline{S}$ hanno la forma

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & R_{1h} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & R_{2h} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & R_{th} \\ 0 & & \cdots & 0 & R_{(t+1)h} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & R_{mh} \end{pmatrix}, \quad \overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & S_{1h} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & S_{2h} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & S_{th} \\ 0 & & \cdots & 0 & S_{(t+1)h} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & S_{mh} \end{pmatrix}$$

Notiamo che poichè R ed S sono equivalenti per righe ad A, allora esse sono equivalenti per righe tra loro. Ne segue che anche $\overline{R}$ ed $\overline{S}$ sono equivalenti per righe tra loro. Ci sono quattro possibilità:

1. R^h è dominante ed S^h è dominante;
2. R^h è dominante ed S^h non è dominante;
3. R^h non è dominante ed S^h è dominante;
4. R^h non è dominante ed S^h non è dominante.

Vediamo che oguna delle quatrro possibilità contraddice l'ipotesi $R^h \neq S^h$.

1. In questo caso sia R^h che S^h contegono il $(t+1)$–esimo 1–dominante e quindi
$$R^h = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 = R_{(t+1)h} = S_{(t+1)h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = S^h$$
contro l'ipotesi.

2. In questo caso si ha
$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 = R_{(t+1)h} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & S_{1h} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & S_{2h} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & S_{th} \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(perchè?). Sia E_R il sistema avente come matrice completa la matrice $\overline{R}$ e sia E_S il sistema avente come matrice completa la matrice $\overline{S}$. Poichè $\overline{R}$ e $\overline{S}$ sono equivalenti per righe i due sistemi E_R ed E_S sono equivalenti. Notiamo che la $(t+1)$–esima equazione di E_R è
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_t = 1$$
e quindi E_R è incompatibile. Invece il sistema E_S è
$$\begin{aligned} x_1 &= S_{1h} \\ x_2 &= S_{2h} \\ &\vdots \\ x_t &= S_{th} \end{aligned}$$

e quindi ammette l'unica soluzione $(S_{1h}, S_{2h}, \cdots, S_{th})$. Ne segue una contraddizione.

3. Questo caso è uguale al precedente scambiando il ruolo di $\overline{R}$ ed $\overline{S}$.

4. In questo caso si ha

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & R_{1h} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & R_{2h} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & R_{th} \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & S_{1h} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & S_{2h} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & S_{th} \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(perchè?). Sia E_R il sistema avente come matrice completa la matrice $\overline{R}$ e sia E_S il sistema avente come matrice completa la matrice $\overline{S}$. Poichè $\overline{R}$ e $\overline{S}$ sono equivalenti per righe i due sistemi E_R ed E_S sono equivalenti. Il sistema E_R è

$$\begin{aligned} x_1 &= R_{1h} \\ x_2 &= R_{2h} \\ &\vdots \\ x_t &= R_{th} \end{aligned}$$

ed ammette l'unica soluzione $(R_{1h}, R_{2h}, \cdots, R_{th})$. Similmente, il sistema E_S è

$$\begin{aligned} x_1 &= S_{1h} \\ x_2 &= S_{2h} \\ &\vdots \\ x_t &= S_{th} \end{aligned}$$

ed ammette l'unica soluzione $(S_{1h}, S_{2h}, \cdots, S_{th})$. Poichè E_R ed E_S sono equivalenti, si ha $(R_{1h}, R_{2h}, \cdots, R_{th}) = (S_{1h}, S_{2h}, \cdots, S_{th})$ ovvero $R^h = S^h$, contro l'ipotesi.

$\square$