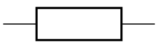
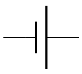
Applicazioni ai sistemi elettici

4 Ottobre 2017

In un sistema elettrico è spesso necessario trovare l'intensità della corrente in amperes (A) che scorre nei varie rami della rete. Queste reti solitamente contengono delle resistenze che rallentano il flusso di corrente. Le resistenze si indicano con il simbolo  e sono misurate in Ohms (Ω). L'intensità della corrente può venir incrementata dalla presenza di generatori di tensione (tipicamente batterie). La tensione di questi generatori viene misurata in volts (V). Adoperiamo il simbolo  per denotare un generatore di tensione (in cui la corrente scorre da sinistra a destra: si noti che la stanghetta di sinistra è più corta di quella di destra). Assumiamo che i generatori non procurino alcuna resistenza al sistema. Una *maglia* (o circuito chiuso) di un sistema elettrico è un percorso chiuso che partendo da un nodo torna allo stesso nodo senza attraversare uno stesso ramo due volte. Ogni maglia può essere orinetata in senso orario od in senso anti–orario. Se scegliamo un'orientazione allora parliamo di *maglia orientata*. Il flusso di corrente è governato dalle seguenti leggi:

Legge di Ohm:
Se si applica una tensione V ai capi di una resistenza R, la corrente elettrica risultante che la attraversa ha intensità I data dall'equazione: $V = RI$.

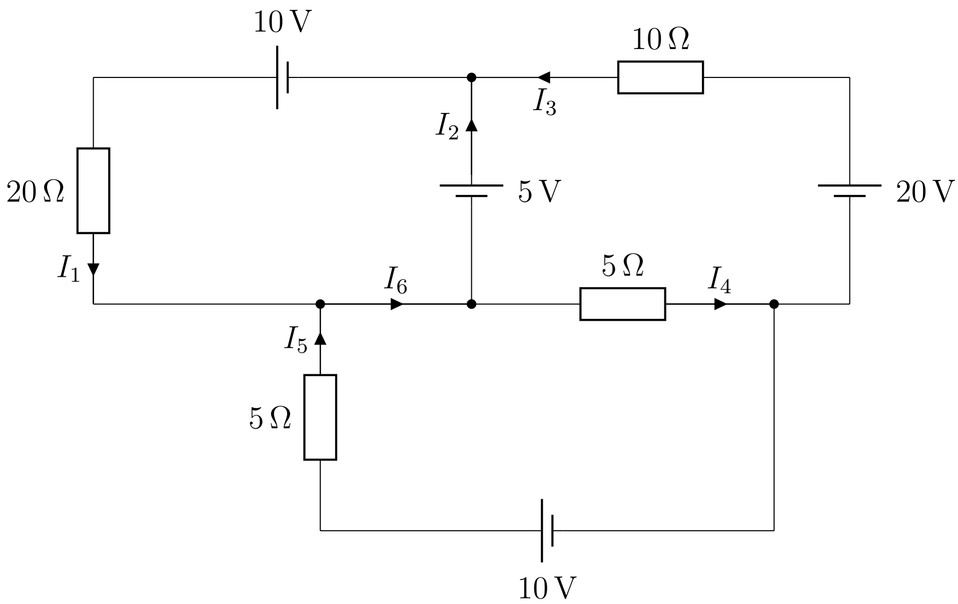
Leggi di Kirchhoff:

1. (Regola di giunzione) Il flusso di corrente che arriva in un nodo del sistema è uguale al flusso di corrente che ne esce.

2. (Regola della maglia) La somma algebrica delle tensioni in ogni maglia orientata del sistema è uguale a zero.

Nell'applicare la seconda legge di Kirchhoff, bisogna scegliere un'orientazione (orario o anti–orario) di ogni maglia del sistema e considerare una tensione positiva se si propaga nella direzione scelta e negativa se si propaga nella direzione opposta. Questo spiega perchè abbiamo dovuto specificare "somma algebrica".

Esempio Trovarie le varie correnti nel seguente sistema elettrico.



Soluzione Si noti che abbiamo fissato la direzione del flusso di corrente in ogni segmento del circuito (un segmento è un ramo del cicruito tra un nodo ed un altro). Le incognite del problema sono le intensità di corrente $I_1, \cdots, I_6$ nei sei segmenti del circuito. Per la legge di giunzione attorno ai quattro nodi valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
I_2 + I_3 &= I_1 \\
I_1 + I_5 &= I_6 \\
I_6 &= I_2 + I_4 \\
I_4 &= I_3 + I_5
\end{aligned}$$

Orientiamo ogni maglia in senso anti–orario. La legge di maglia ci dice che lungo ogni maglia la somma algebrica dei voltaggi è uguale a zero. Per calcolare i voltaggi nel passaggio attraverso ogni resistenza utilizziamo la legge di Ohm. Otteniamo quindi le tre equazioni di maglia

$$\begin{aligned}
10 + 5 &= 20I_1 \\
-5 + 20 &= 10I_3 + 5I_4 \\
-10 &= -5I_5 - 5I_4
\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi studiare il sistema di 7 equazioni in 6 incognite la cui matrice completa è data da

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Riducendo a scala ridotta questa matrice troviamo che il sistema ammette un'unica soluzione data da

$$I_1 = \tfrac{15}{20}$$

$$I_2 = -\tfrac{1}{20}$$

$$I_3 = \tfrac{16}{20}$$

$$I_4 = \tfrac{28}{20}$$

$$I_5 = \tfrac{12}{20}$$

$$I_6 = \tfrac{27}{20}$$