Note

31 Ottobre e 2 Novembre 2017

1 Inviluppo convesso

Un sottoinsieme $\mathcal{C}$ del piano o dello spazio si dice *convesso* se dati comunque due suoi punti $A, B \in \mathcal{C}$ tutto il segmento $\overline{AB}$ è contenuto in $\mathcal{C}$.

Esempio 1.1. *Dati due punti A e B il segmento $\overline{AB}$ è dato da (esercizio!)*

$$\overline{AB} = \{(1-t)A + tB |\, 0 \leq t \leq 1\} = \{t_1 A + t_2 B |\, t_1 + t_2 = 1,\, t_1, t_2 \geq 0\}.$$

Esempio 1.2. *Dato $r > 0$ ed un punto C, la palla di centro C e raggio r è l'insieme*

$$B(C, r) = \{X |\, ||X - C|| \leq r\}.$$

Esso è un insieme convesso: infatti siano $X_1, X_2 \in B(C, r)$ e sia $(1-t)X_1 + tX_2$ un punto del segmento tra X_1 ed X_2. Si ha

$$||(1-t)X_1 + tX_2|| \leq ||(1-t)X_1|| + ||tX_2|| = (1-t)||X_1|| + t||X_2|| \leq (1-t)r + tr = r$$

dove si è usata la disuguaglianza triangolare (dimostrarla!):

$$||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||.$$

Dati n punti $P_1, \cdots, P_n$ il loro *inviluppo convesso* è l'insieme

$$\langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{conv} = \{t_1 P_1 + \cdots + t_n P_n |\, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,\, t_i \geq 0\}.$$

Un vettore $P \in \langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{conv}$ si dice una *combinazione convessa* dei punti $P_1, \cdots, P_n$.

Teorema 1.3. *L'insieme $\langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{conv}$ è convesso.*

Dimostrazione: Siano $A = t_1P_1 + \cdots t_nP_n$ e $B = s_1P_1 + \cdots + s_nP_n$ due punti di $\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$. Mostriamo che ogni punto $(1-t)A + tB$ del segmento $\overline{AB}$ appartiene a $\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$. Si ha

$$(1-t)A + tB = (1-t)[\sum_{i=1}^{n} t_iP_i] + t[\sum_{i=1}^{n} s_iP_i] = \sum_{i=1}^{n}[(1-t)t_i + ts_i]P_i$$

Poichè

1. $(1-t)t_i + ts_i \geq 0$ e
2. $\sum_{i=1}^{n}(1-t)t_i + ts_i = (1-t)[\sum_{i=1}^{n} t_i] + t[\sum_{i=1}^{n} s_i] = (1-t) + t = 1$,

il punto $(1-t)A + tB$ appartiene a $\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$.

□

Il prossimo risultato ci dice che $\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$ è il più piccolo insieme convesso contenente i punti $P_1, \cdots, P_n$.

Teorema 1.4. *Sia $\mathcal{C}$ un insieme convesso contenente i punti $P_1, \cdots, P_n$; allora $\mathcal{C}$ contiene anche $\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$.*

Dimostrazione: Sia $P = t_1P_1 + \cdots t_nP_n$ un punto di $\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$. Mostriamo che $P \in \mathcal{C}$. Se $t_n = 1$, allora $t_1 = \cdots = t_{n-1} = 0$ e quindi $P = P_n \in \mathcal{C}$ per ipotesi. Se $t_n \neq 1$ allora

$$P = (1-t_n)[\frac{t_1}{(1-t_n)}P_1 + \frac{t_2}{(1-t_n)}P_2 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{(1-t_n)}P_{n-1}] + t_nP_n$$

Questo dimostra che se $\langle P_1, \cdots, P_{n-1}\rangle_{conv}$ è contenuto in $\mathcal{C}$ allora anche $\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$ lo è, per ogni n. Quindi

$$\langle P_1\rangle_{conv} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \langle P_1, P_2\rangle_{conv} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \langle P_1, P_2, P_3\rangle_{conv} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv} \subset \mathcal{C}.$$

□

2 Sottospazi affini e lineari

Dati n punti $P_1, \cdots, P_n$ (del piano o dello spazio) il loro *inviluppo affine* è l'insieme

$$\langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{aff} = \{t_1P_1 + \cdots + t_nP_n | \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}.$$

Un vettore $P \in \langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{aff}$ si dice una *combinazione affine* dei punti $P_1, \cdots, P_n$. Un sottoinsieme del piano o dello spazio si dice un *sottospazio affine* se è l'inviluppo affine di alcuni punti.

Diciamo che i punti $P_1, \cdots, P_n$ sono *affinemente indipendenti* se nessuno di tali punti è combinazione affine dei rimanenti. Si noti che se $P_1, \cdots, P_n$ non sono affinemente indipendenti, allora il loro inviluppo affine è generato da un numero minore di punti: in altre parole se $P_n \in \langle P_1, \cdots, P_{n-1} \rangle_{aff}$ allora (esercizio!)

$$\langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{aff} = \langle P_1, \cdots, P_{n-1} \rangle_{aff}. \tag{1}$$

Inoltre vale anche il viceversa vale: se (1) è soddisfatta allora $P_1, \cdots, P_n$ non sono affinemente indipendenti.

Sia $\mathcal{A} = \langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{aff}$ un sottospazio affine tale che i suoi generatori $P_1, \cdots, P_n$ sono affinemente indipendenti. In tal caso definiamo la *dimensione* di $\mathcal{A}$ come

$$\dim \mathcal{A} := n - 1.$$

Ad esempio un punto $\langle P \rangle$ ha dimensione zero. Una *retta affine* è un sottospazio affine di dimensione uno. Un *piano affine* è un sottospazio affine di dimensione due.

Dati n punti $P_1, \cdots, P_n$ (del piano o dello spazio) il loro *inviluppo lineare* è l'insieme

$$\langle P_1, \cdots, P_n \rangle = \{t_1 P_1 + \cdots + t_n P_n\}$$

ovvero è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori posizione degli n punti. Un sottoinsieme del piano o dello spazio si dice un *sottospazio lineare o vettoriale* se è l'inviluppo lineare di alcuni punti. Si noti che un sottospazio vettoriale deve necessariamente contenere l'origine (perchè?).

I vettori posizione $\overset{\to}{OP_1}, \cdots \ \overset{\to}{OP_n}$ si dicono *linearmente indipendenti* se nessuno di loro è combinazione lineare dei rimanenti. Si noti che se $\overset{\to}{OP_1}, \cdots, \overset{\to}{OP_n}$ non sono linearmente indipendenti allora il loro inviluppo lineare è generato da un numero minore di vettori: in altre parole se $P_n \in \langle P_1, \cdots, P_{n-1} \rangle$ allora (esercizio!)

$$\langle P_1, \cdots, P_n \rangle = \langle P_1, \cdots, P_{n-1} \rangle.$$

Sia $\mathcal{U} = \langle P_1, \cdots, P_n \rangle$ un sottospazio vettoriale tale che i suoi generatori $P_1, \cdots, P_n$ sono linearmente indipendenti. In tal caso definiamo la *dimensione* di $\mathcal{U}$ come

$$\dim \mathcal{U} := n.$$

A differenza dei sottospazi affini, esiste un unico sottospazio vettoriale di dimensione zero che è l'insieme composto dal solo vettore nullo.

I sottospazi affini sono strattamente legati ai sottospazi vettoriali:

Teorema 2.1. *Sia $\mathcal{A} = \langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{aff}$ un sottospazio affine di dimensione $n-1$. Allora $\mathcal{A}$ è il traslato di un sottospazio vettoriale di dimensione $n-1$: più precisamente*

$$\mathcal{A} = P_1 + \langle \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_2}, \cdots, \vec{P_1P_n} \rangle$$

Dimostrazione: Sia $P = t_1P_1 + \cdots + t_nP_n \in \mathcal{A}$; poichè $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ possiamo scrivere

$$P = (1 - \sum_{i=2}^n t_i)P_1 + t_2P_2 + \cdots + t_nP_n = P_1 + t_2(\vec{P_1P_2}) + \cdots + t_n(\vec{P_1P_n})$$

e quindi $\mathcal{A} \subseteq P_1 + \langle \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_2}, \cdots, \vec{P_1P_n} \rangle$. L'altra inclusione si dimostra nello stesso modo.

Facciamo vedere che $\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_2}, \cdots, \vec{P_1P_n}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $P_1, \cdots, P_n$ sono affinemente indipendenti: supponiamo prima che $P_1, \cdots, P_n$ siano affinemente indipendenti e supponiamo per assurdo che $\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_2}, \cdots, \vec{P_1P_n}$ non siano linearmente indipendenti: allora esiste uno di tali vettori (supponiamo $\vec{P_1P_n}$) che è combinazione lineare dei rimanenti:

$$\vec{P_1P_n} = s_2 \vec{P_1P_2} + s_3 \vec{P_1P_3} + \cdots + s_{n-1} \vec{P_1P_{n-1}}$$

ovvero

$$P_n - P_1 = s_2(P_2 - P_1) + \cdots + s_{n-1}(P_{n-1} - P_1) = \sum_{i=2}^{n-1} s_iP_i - (\sum_{i=2}^{n-1} s_i)P_1$$

che diventa

$$P_n = (1 - \sum_{i=2}^{n-1} s_i)P_1 + \sum_{i=2}^{n-1} s_iP_i \in \langle P_1, \cdots, P_{n-1} \rangle_{aff}$$

contro l'ipotesi. Il viceversa si fa esattamente nello stesso modo (esercizio!).

□

3 Sottospazi affini del piano

Sottospazi affini del piano di dimensione 0: essi sono tutti e soli i punti $P = \langle P \rangle_{aff}$.

Sottospazi affini del piano di dimensione 1: due punti del piano sono affinemente indipendenti se e solo se sono distinti (esercizio). Siano quindi $P \neq Q$ due punti. Allora il loro inviluppo affine

$$\langle P, Q \rangle_{aff} = \{(1-t)P + tQ |\, t \in \mathbf{R}\} = P + \langle \vec{PQ} \rangle$$

è la retta passante per P e Q; ovvero è la retta passante per P e avente vettore direttore $\vec{PQ}$.

Sottospazi affini del piano di dimensione 2: Tre punti del piano sono affinemente indipendenti se e solo se non giacciono su una stessa retta (esercizio!). In tal caso il loro inviluppo affine è tutto il piano.

Sottospazi affini di dimensione ≥ 3: Siano $P_1, \cdots P_n$ n punti distinti del piano con $n \geq 4$. Allora $P_1, \cdots, P_n$ non sono affinemente indipendenti. Infatti: sia r la retta per P_1 e per P_2: se r contiene tutti gli n punti allora $\langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{aff} = r = \langle P_1, P_2 \rangle_{aff}$ e dato che $n > 2$ essi non sono affinemente indipendenti. Se esiste almeno un punto P_3 che non appartiene a r allora

$$\mathcal{E}^2 \supseteq \langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{aff} \supseteq \langle P_1, P_2, P_3 \rangle_{aff} = \mathcal{E}^2$$

e quindi $\langle P_1, \cdots, P_n \rangle_{aff} = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle_{aff}$ da cui deduciamo che $P_1, \cdots, P_n$ non sono affinemente indipendenti per $n \geq 4$. Concludiamo che non ci sono sottospazi affini del piano di dimensione ≥ 3.

4 Sottospazi affini dello spazio

Sottospazi affini dello spazio di dimensione 0: essi sono tutti e solo i punti $P = \langle P \rangle_{aff}$.

Sottospazi affini dello spazio di dimensione 1: due punti dello spazio sono affinemente indipendenti se e solo se sono distinti (esercizio). Siano quindi $P \neq Q$ due punti. Allora il loro inviluppo affine

$$\langle P, Q \rangle_{aff} = \{(1-t)P + tQ |\, t \in \mathbf{R}\} = P + \langle \vec{PQ} \rangle$$

è la retta passante per P e Q; ovvero è la retta passante per P e avente vettore direttore $\vec{PQ}$.

Sottospazi affini dello spazio di dimensione 2: Tre punti dello spazio sono affinemente indipendenti se e solo se non giacciono su una stessa retta.

Siano quindi P, Q ed R tre punti che non giacciono su una stessa retta. Il loro inviluppo affine

$$\langle P, Q, R\rangle = \{(1-t_2-t_3)P + t_2Q + t_3R |\, t_2, t_3 \in \mathbf{R}\} = P + \langle \vec{PQ}, \vec{PR}\rangle$$

è l'unico piano che li contiene tutti.

Sottospazi affini dello spazio di dimensione 3: Quattro punti nello spazio sono affinemente indipendenti se e solo non giacciono tutti su uno stesso piano e non giacciono a tre-a tre su una stessa retta (esercizio). In tal caso il loro inviluppo affine è tutto lo spazio (esercizio! suggerimento: usare la proiezione ortogonale su uno dei 4 piani che essi generano). Per cui esiste un unico sottospazio affine dello spazio di dimensione tre.

Sottospazi affini dello spazio di dimensione ≥ 4: Siano $P_1, \cdots P_n$ n punti distinti del piano con $n \geq 5$. Allora $P_1, \cdots P_n$ non sono affinemente indipendenti (esercizio!). Quindi non esistono sottospazi affini dello spazio di dimensione ≥ 4.

5 Centro di massa e centroide

Consideriamo un sistema fisico composto da n particelle (nel piano o nello spazio) di masse rispettivamente $m_1, \cdots, m_n$ e posizionate nei punti $P_1, \cdots, P_n$. Il *centro di massa* del sistema è il punto

$$C := \frac{m_1P_1 + m_2P_2 + \cdots + m_nP_n}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

Si noti che $C \in \langle P_1, \cdots, P_n\rangle_{conv}$ (esercizio!). Nel caso in cui le particelle hanno tutte la stessa massa $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ allora

$$C = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n} = \frac{1}{n}(P_1 + \cdots + P_n).$$

In tal caso il centro di massa si chiama anche il centroide del sistema. Se $n = 3$ e P_1, P_2 e P_3 sono affinemenete indipendenti, il centroide del sistema è l'intersezione delle tre mediane del triangolo $T = \langle P_1, P_2, P_3\rangle_{conv}$.