Programma di massima del corso “Geometria 1” per Ingegneria Civile
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

a.a. 2016/2017

Settimana 1: Lun 26/09: Info Docente. Info Corso (programma di massima, orario lezioni, ricevimento). Obiettivi del corso. Metodo. Modalità di esame. Libro di testo e libri di esercizi. Presentazione della piattaforma ÒConnectÓ da parte della Dr.ssa Molinari. Insiemi e funzioni: Unione, intersezione, differenza e prodotto cartesiano di insiemi. Dimostrazione della legge di distributività dellÕunione rispetto allÕintersezione. Definizione di funzione tra due insiemi. Immagine di una funzione, controimmagine di un sottoinsieme. Funzioni iniettive, suriettive e bigiettive. La funzione cubo è iniettiva. Esempi e controesempi.

Mar 27/09: Elementi di logica elementare: implicazioni logiche, negazione di una implicazione logica. Simboli matematici. Definizione di gruppo commutativo. Definizione di campo. Numeri naturali, interi, razionali e reali. I numeri razionali e reali formano un campo. Polinomi a coefficienti in un campo (definizione).

Merc 28/09: Esercizi su insiemi, funzioni, campi e implicazioni logiche.

Giov 29/09: Vettori geometrici del piano. Definizione. Definizione della somma di due vettori geometrici. LÕinsieme dei vettori geometrici applicati in un punto O con la somma appena definita è un gruppo abeliano. Qui si trovano le note di questa lezione.

Settimana 2: Lun 03/10: Basi di vettori nel piano. Coordinate di un vettore nel piano. Correzione degli esercizi settimanali.

Mar 04/10: La mappa F_B che dà un isomorfismo tra i vettori del piano e lo spazio $\mathbf{R}^2$ delle coppie ordiante di numeri reali.

Mer 05/10: Sistemi di riferimento affine nel piano e nello spazio. Equazioni di rette e piani. Intersezione di due rette.

Gio 06/10: Equazioni parametriche di rette e piani. Esempi.

Settimana 3: Lun 10/10: Sistemi di equazioni lineari. Operazioni elementari sulle righe di un sistema di equazioni lineari.

Mar 11/10: Sistemi triangolari superiori. Principio di induzione. Un sistema triangolare superiore ammette unÕunica soluzione se e solo se gli elementi diagonali sono non-nulli. Eliminazione di Gauss per sistemi quadrati. Pivot di una matrice. Esempi.

12/10: Matrici non-singolari. Un sistema quadrato con matrice dei coefficienti non-singolare ammette unÕunica soluzione se e solo se ha tutti i pivot non-nulli. Esempi. Definizione di spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali. Esempi (sottospazi vettoriali di $\mathcal{V}_O^2$).

13/10: Sistemi lineari omogenei. LÕinsieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$. Combinazioni lineari. Un sistema non omogeneo è compatibile se e solo se il vettore dei termini noti giace nello span delle colonne della matrice dei coefficienti.

Settimana 4: Lun 17/10: Spazi e sottospazi. Combinazioni lineari.

18/10: Indipendenza lineare e basi.

19/10: Tutoraggio (svolto dal Dr. Francesco Meazzini)

20/10: Esistenza delle basi per spazi vettoriali finitamente generati. Dimensione di uno spazio vettoriale. Teorema del completamento.

Settimana 5: 24/10: Somma e intersezione di sottospazi. Formula di Grassmann. Somma diretta di sottospazi. Esistenza del supplementare di un sottospazio. Teorema di struttura per sistemi lineari.

25/10: Esercizi sul teorema di struttura. Applicazioni lineari. Apllicazione lineare associata ad una matrice. Esempi.

26/10: Ancora sulle applicazioni lineari. Esempi. Ogni applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base. Nucleo e immagine di unÕapplicazione lineare. UnÕapplicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è zero. Teorema della dimensione.

27/10: Esercizi riguardo il teorema della dimensione. Formula di Aggiunzione. Decomposizione di $\mathbf{R}^n$ come somma diretta del nucleo di una matrice e dellÕimmagine della trasposta.

Settimana 6: 31/10: Lezione rimandata per venire incontro alle necessità degli studenti fuori-sede (il ricevimento è attivo). Il docente richiede di studiare i numeri complessi come compito per casa.

01/11: Vacanza accademica.

02/11: Decomposizione indotta da una matrice reale. Cenni sulle matrici complesse (la matrice coniugata ha lo stesso rango della matrice di partenza, matrice aggiunta). Decomposizione indotta da una matrice complessa. Cenni sullÕalgoritmo di riduzione a scala.

03/11: Riduzione a scala (matrici a scala e loro proprietà). Ogni sistema lineare è equivalente ad un sistema a scala. Applicazioni della riduzione a scala: calcolo del rango di una matrice, base dellÕimmagine, base del nucleo, base dellÕintersezione e della somma di due sottospazi di $\mathbf{R}^n$, completamento di un insieme lin. ind. ad una base di $\mathbf{R}^n$...

Settimana 7: 07/11: Discussione degli esercizi settimanali riguardo lÕuso della riduzione a scala per la risoluzione di problemi algebrici e geometrici.

08/11: Sottospazi vettoriali e affini di $\mathbf{R}^n$. Ogni tale sottospazio è il nucleo e lÕimmagine di una matrice. Equazioni cartesiane e parametriche di tali sottospazi. Discussione di come ottenere equazioni cartesiane a partire da equazioni parametriche e viceversa.

09/11: Matrici ed applicazioni lineari: Lo spazio vettoriale L(V,W) delle applicazioni lineari da V a W. UnÕapplicazione lineare T:V -¿ W è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva. Se dim V=dim W, allora T è un isomorfismo se e solo se è iniettiva se e solo se è suriettiva. Esempi di spazi vettoriali isomorfi.

10/11: Isomorfismo tra $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ e le matrici mxn. Matrice identità, matrice nulla. Moltiplicazione righe per colonne di matrici. Matrici invertibilli. Uso della riduzione a scala per il calcolo dellÕinversa di una matrice invertibile.

Settimana 8: 14/11: Soluzione di alcuni esercizi settimanali su: moltiplicazione di matrici; criteri per stabilire se una matrice 2x2 è invertibile; inversa di una matrice 2x2 (invertibile); equazioni cartesiane e parametriche dellÕintersezione e della somma di due sottospazi di $\mathbf{R}^4$ (Esercizio 2); inversa di una matrice 4x4 (es. 10); soluzione dellÕesercizio 8.

15/11: Matrice associata ad unÕapplicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Isomorfismo tra L(V,W) e le matrici (dim W)x (dim V). Esempi.

16/11: Matrice del cambiamento di base tra due basi di uno spazio vettoriale V. Esempi.

17/11: Come cambia la matrice associata ad unÕapplicazione lineare se si cambiano basi sia in partenza che in arrivo. Matrici associate ad un endomorfismo rispetto ad una data base. Matrici simili. Matrici di rotazione nel piano.

Settimana 9: 21/11: Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale determina una classe di similitudine di matrici, e viceversa ogni classe di similitudine di matrici determina un endomorfismo. Correzione degli esercizi settimanali (Settimana 8).

22/11: Definizione di determinante come unica funzione multilineare, alternante e che vale 1 sullÕidentità. Discussione della sua unicità. Teorema di esistenza del determinante (senza dimostrazione) attraverso lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna. Relazione tra il determinante di una matrice 2x2 con lÕarea del parallelogramma generato dalle colonne. Esempi.

23/11: Sviluppi di laplace del determinante (senza dimostrazione). Esempi. Il determinante è invariante per trasposizione. Tecniche di calcolo del determinante: sviluppi di Laplace o eliminazione di Gauss. Esempi.

24/11: Teorema di Binet. Il determinante dellÕinversa è uguale allÕinverso del determinante. Teorema di Cramer. Uso del teorema di Cramer per trovare la matrice inversa. Esempi.

Settimana 10: 28/11: Correzione degli esercizi settimanali.

29/11: Ancora sul determinante di una matrice 2x2 come area (orientata) di un parallelogramma. Determinante di un endomorfismo lineare. Calcolo dellÕarea del trasformato T(P) di un parallelogramma P tramite un endomorfismo lineare T di $\mathbf{R}^2$. Definizione di autovettore ed autovalore. Primi esempi. Soluzione di un sistema diagonale di equazioni differenziali lineari. Una matrice di rotazione del piano non ammetter autovettori reali, a meno che non sia lÕidentità o la sua opposta.

30/11: Spettro di un endomorfismo lineare. Le matrici di rotazione (non banali) sono diagonalizzabili su C ma non su R. Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

01/12: Polinomio caratteristico di un endomorfismo lineare. Sua determinazione esplicita in dimensione 2 e 3. Il polonomio caratteristico è un polinomio di grado n, avente come coefficiente di grado (n-1) la traccia (a meno del segno), e come termine noto il determinante. Gli autovalori sono gli zeri del polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. La molteplicità geometrica è minore o uguale della molteplicità algebrica.

Settimana 11: 05/12: Correzione degli esercizi della settimana 10.

06/12: Caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili: Un endomorfismo lineare è diagonalizzabile se e solo ha tutti gli autovalori nel campo e per ognuno di essi la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica. Prima parte del teorema spettrale: ogni matrice simmetrica reale ha lo spettro reale; in particolare ammette un autovettore reale (la dimostrazione usa il prodotto hermitiano canonico di $\mathbf{C}^n$).

07/12: Strutture metriche: prodotto scalare standard di $\mathbf{R}^n$. Definizione di prodotto scalare su $\mathbf{R}^n$ come di una funzione bilineare, simmetrica e definita positiva. Ogni prodotto scalare su $\mathbf{R}^n$è della forma ${}^T XAY$ per una opportuna matrice A. Definizione di lunghezza o norma di un vettore di $\mathbf{R}^n$ rispetto ad un prodotto scalare fissato. Definizione di ortogonalità (o perpendicolarità) tra due vettori di $\mathbf{R}^n$. Teorema di Pitagora. Proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbf{R}^n$ su un vettore non-nullo e sua componente. Esempio: coefficienti di Fourier.

08/12: Vacanza accademica.

Settimana 12: 12/12: Coseno dellÕ angolo tra due vettori di $\mathbf{R}^n$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Sottospazio ortogonale di un sottospazio vettoriale U di $\mathbf{R}^n$. Definizione di base ortonormale. Correzione di alcuni esercizi della settimana 11.

13/12: Coefficienti di Fourier (ovvero componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale). Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ e sia data una sua base ortogonale; allora si può completare tale base ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^n$. In particolare ogni sottospazio di $\mathbf{R}^n$ ammette una base ortonormale. Esempi. Teorema spettrale (parte 2): sia A una matrice simmetrica nxn reale; allora esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ munito del prodotto scalare standard, composta di autovettori per A.

14/12: Ancora sulla seconda parte del teorema spettrale. Illustrazione della dimostrazione su un esempio. Matrici ortogonali e loro proprietà.

15/12: Teorema spettrale (parte 3): se una matrice nxn reale ammette una base ortonormale di autovettori in $\mathbf{R}^n$ munito del prodotto scalare standard, allora essa è simmetrica. Una matrice A è simmetrica se e solo se esiste una matrice ortogonale U tale che ${}^TUAU$ è diagonale. Prodotto vettore in $\mathbf{R}^3$ e sue proprietà.

Settimana 13: 19/12: Nozione di distanza in uno spazio metrico. Definizione di distanza tra due vettori di uno spazio metrico, e di distanza tra due sottoinsiemi di uno spazio metrico. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio vettoriale di uno spazio metrico. La distanza tra un vettore P e un sottospazio affine U=U0+P0 è uguale alla norma della differenza tra (P-P0) e la sua proiezione ortogonale su U0. Casi particolari: distanza punto-iperpiano. Distanza punto-retta. Formule esplicite nel caso di $\mathbf{R}^2$ ed $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard.

20/12: Ancora sulla distanza. Distanza retta-retta, in uno spazio metrico arbitrario. Formula esplicita nel caso di $\mathbf{R}^3$ col prodotto scalare standard. Prodotto misto. Esempi. Definizione di forma quadratica reale. Le forme quadratiche reali su n variabili sono in biiezione con le matrici simmetriche nxn reali.

21/12: Definizione di forma quadratica (reale) definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita. Una forma quadratica è definita positiva se e solo se la sua matrice ha tutti autovalori positivi. Una forma quadratica è semi-definita positiva se e solo se la sua matrice ha tutti autovalori non–negativi ed almeno uno uguale a zero. Una forma quadratica definita positiva è una funzione streattamente convessa. Una forma quadratica semi-definita positiva è una funzione convessa. Definizione di conica. Nove esempi di coniche: ellisse reale, iperbole, parabola, ellisse immaginaria, rette reali incidenti, rette complesse incidenti, rette reali parallele, rette complesse parallele, rette coincidenti. Definizione di equivalenza affine e metrica di due coniche. Enunciato del teorema di classificazione affine delle coniche: ogni conica è affinemente equivalente ad una ed una sola conica tra le nove elencate sopra.

22/12: Dimostrazione parziale del teorema di classificazione affine delle coniche: abbiamo dimostrato che data una conica essa è affinemente equivalente ad una delle nove coniche elencate sopra. Esempio.