D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 5.6.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

(ii) Se $f(x) = 1$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, allora quanto vale $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Risposta

(i)

(ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza ed unicità delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

(ii) Mostrare con un esempio che la sola continuità della f non é sufficiente per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy.

Risoluzione

(i)

(ii) $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (Pennello di Peano)

1) $y(t) \equiv 0 \quad \forall t$

2) $y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{4}t^2 & t > 0 \end{cases}$

sono due sol. del pb. di Cauchy

Esercizio 1 [3 punti]

Il numero complesso $(5+i)/(5-i)$

- [a] é reale;
- [b] é puramente immaginario;
- [c] ha parte reale strettamente negativa;
- [X] ha parte reale strettamente positiva.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$z = \frac{5+i}{5-i} = \frac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{25-1+10i}{25+1} = \frac{24}{26} + \frac{10}{26} i$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{24}{26} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{10}{26}$$

Esercizio 2 [3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^x f(t)dt = x^2 - \sin(x)$. Allora $f(0)$ vale

- [a] 0
- [b] 1
- [X] -1
- [d] $\pi/4$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal Teo. fondamentale del Calcolo Integrale, $f(x) = 2x - \cos(x)$

quindi $f(0) = -1$

Esercizio 3 [3 punti]

La derivata direzionale di $f(x,y) = x^y$ nel punto $(e,1)$ e nella direzione $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale

- [a] $1/\sqrt{2}$
- [b] 0
- [X] $(e+1)/\sqrt{2}$
- [d] $\sqrt{2}/2$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$Df(x,y) = \left(x^y \cdot \frac{y}{x}, x^y \cdot \ln(x)\right)$ quindi

$Df(e,1) = (1, e)$

Poiché f è differenziabile nel suo dominio, per $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,e) = (1,e) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+e}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4x^2 + e^{4x^2} - 1}{x\sin(5x) - 5x^2}$$

Risoluzione

$x \sin(5x) - 5x = x\left(5x - \frac{(5x)^3}{3!} + \dots\right) - 5x^2 = -\frac{125}{6} x^4 + o(x^4)$

$e^{4x^2} - 1 - 4x^2 = \left(1 + 4x^2 + \frac{(4x^2)^2}{2} + \dots\right) - 1 - 4x^2 =$

$= \frac{16x^4}{2} + o(x^4) \approx 8x^4$

$\lim_{x\to 0} \frac{-4x^2 + e^{4x^2} - 1}{x \sin(5x) - 5x} = -\frac{48}{125}$

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione

- Eq. omogenea: $y'' - 8y' + 15y = 0$
  Pol. caratteristico: $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-15} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$
  Integrale generale eq. omogenea: $y_0(X) = C_1 e^{5X} + C_2 e^{3X}$
- Sol. particolare non omogenea (metodo di somiglianza)
  $f(x) = 2e^{3x} \longrightarrow \bar{y} = Axe^{3x}, \quad \bar{y}'(x) = e^{3x}(3Ax + A)$
  $y''(x) = e^{3x}(9Ax + 6A)$
  Sostituendo nell'equazione, ottengo $A = -1$.
- Integrale generale eq. non omogenea
  $y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{3x} - xe^{3x}$
- Imponendo i dati iniziali
  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 5C_1 + 3C_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Sol. del pb. di Cauchy

$y(x) = \frac{1}{2}e^{5x} - \frac{1}{2}e^{3x} - xe^{3x}$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$ e tracciarne un grafico approssimato.

Risoluzione

Dominio : $x > 0$, $x - \ln(x) \neq 0 \iff x > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = 0$$

Segno : $f(x) > 0 \iff \ln(x) > 0 \iff x > 1$

$f(x) = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$

Derivata

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}$$

$f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$

$f'(x) > 0 \iff 1 - \ln(x) > 0 \iff x \in (0, e)$

$f'(x) < 0 \iff 1 - \ln(x) < 0 \iff x \in (e, +\infty)$