D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 14.1.2020: Compito B-2 turno

NOME: **COGNOME:** **MATRICOLA:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di limite $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Fare un esempio di successione limitata superiormente, ma non inferiormente.

Risposta

(i) ______________________________

____

____

____

____

____

(ii) ______________________________

____

____

____

____

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

(ii) Fare un esempio di funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ che non sia continua in $[0,1]$, ma sia integrabile in $[0,1]$.

Risoluzione

(i) ______________________________

____

____

____

____

(ii) ______________________________

____

____

____

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $A = \left\{ \frac{5n+7}{3n+10} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Allora si ha

- [a] $\inf A = 0$ e $\sup A = +\infty$;
- [b] $\min A = \frac{7}{10}$ e $\max A = \frac{5}{3}$
- [c] $\inf A = 0$ e $\max A = \frac{7}{10}$;
- [X] $\min A = \frac{7}{10}$ e $\sup A = \frac{5}{3}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè la succ. $\left\{\frac{5n+7}{3n+10}\right\}_n$ è crescente, allora

$\min A = \inf A = \frac{7}{10}$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+7}{3n+10} = \frac{5}{3}$

Esercizio 2

[3 punti]

L'integrale $\int_1^e \frac{1}{2x\ln^3(x)}dx$ vale

- [a] $1/4$;
- [X] $+\infty$;
- [c] 0;
- [d] $4 - 4\ln(2)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\int_1^e \frac{1}{2x\ln^3(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{2t^3}dt = +\infty$$

$t = \ln(x)$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $f'(x) = e^{-f(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora f é strettamente

- [a] crescente e convessa
- [X] crescente e concava
- [c] decrescente e convessa
- [d] decrescente e concava

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = e^{-f(x)} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi f crescente

$f''(x) = -e^{-f(x)} \cdot f'(x) < 0$, quindi f concava

B-2

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - 6y'(t) + 5y(t) = -2(4t+1)e^{2t}$$

Risoluzione

1) Integrale generale eq. omogenea $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \iff \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$

$y_0(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}$

2) Sol. particolare: $f(t) = -2(4t+1)e^{t} \implies \bar{y}(t) = (At+B)e^{2t}$

sostituendo nell'equazione $(2A+B+At) - 6(A+B+At) + 5(At+B) = -8t\ldots$

$A = \frac{8}{3}, \quad B = -\frac{10}{9}$

3) Integrale generale: $y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t} + \left(\frac{8}{3}t - \frac{10}{9}\right)e^{2\ldots}$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\cos(x) - \ln(1+x^2)}{x^6}$$

Risoluzione

Sviluppo al 6° ordine

$x^2\cos(x) = x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{4!} + o(x^6)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \implies \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$

$x^2\cos(x) - \ln(1+x^2) = \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{4!} + o(x^6)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^3)\right)$

$= \frac{x^6}{24} - \frac{x^6}{3} + o(x^6) = -\frac{7}{24}x^6 + o(x^6) \sim -\frac{7}{24}x^6$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x) - \ln(1+x^2)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{24}x^6}{x^6} = -\frac{7}{24}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Discutere dominio, asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-|x|}.$$

Risoluzione

- Dominio : $\mathbb{R}$
- Simmetrie : pari
- Segno e radici : $f(x) = 0 \iff x = \pm 1$

  $f(x) > 0$ se $x \in (-1, 1)$

  $f(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- f continua in $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (Asintoti orizzontali)

- Derivata

$$f'(x) = \begin{cases} -(1-x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} & x > 0 \\ (1-x^2)e^{x} - 2xe^{x} & x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1-h^2)e^{-|h|} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} -he^{-|h|} + \frac{e^{-|h|} - 1}{h} = \begin{cases} -1 & \text{se } h \to 0^+ \\ +1 & \text{se } h \to 0^- \end{cases}$$

(punto angoloso)

- Punti critici

$x_1 = -1 - \sqrt{2}$ (minimi locali)

$x_2 = 1 + \sqrt{2}$