D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 14.1.2020: Compito A-2 turno

NOME: **COGNOME:** **MATRICOLA:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di limite $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

(ii) Fare un esempio di successione limitata che non ammette limite.

Risposta

(i) ______

(ii) ______

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

(ii) Fare un esempio di funzione limitata, non integrabile.

Risoluzione

(i) ______

(ii) ______

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $A = \left\{ \frac{2n+7}{3n+5} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Allora si ha

a) $\inf A = 0$ e $\sup A = +\infty$;
b) $\min A = \frac{2}{3}$ e $\max A = \frac{7}{5}$
c) $\inf A = 0$ e $\max A = \frac{7}{5}$;
[X] d) $\inf A = \frac{2}{3}$ e $\max A = \frac{7}{5}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè la successione $\left\{ \frac{2n+7}{3n+5} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente, si ha $\sup A = \max A = \frac{7}{5}$ e $\inf A = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+7}{3n+5} = \frac{2}{3}$

Esercizio 2

[3 punti]

L'integrale $\int_1^e \frac{1}{x \ln^2(x)} dx$ vale

[X] a) $+\infty$;
b) $\frac{1}{4}$;
c) $\frac{1}{2}$;
d) $2\ln(2) - 1$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\int_1^e \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2} dt = +\infty$$

$t = \ln(x)$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $f'(x) = -e^{f(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora f é strettamente

a) crescente e convessa
b) crescente e concava
[X] c) decrescente e convessa
d) decrescente e concava

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $f'(x) = -e^{f(x)} < 0$, allora f è decrescente. Inoltre $f''(x) = -e^{f(x)} \cdot f'(x) > 0$, allora f è convessa

Esercizio 6

[5 punti]

Discutere dominio, asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|}.$$

Risoluzione

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Simmetrie: funzione pari
- Segno e radici: $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{se } x = \pm 2 \\ f(x) > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ f(x) < 0 & \text{se } x \in (-2, 2) \end{cases}$

- f continua in $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (asintoti orizzontali)

Derivata

- $f'(x) = \begin{cases} 2x e^{x} + (x^2-4)e^{x} & x<0 \\ 2x e^{-x} - (x^2-4)e^{x} & x>0 \end{cases}$

$X = 0$

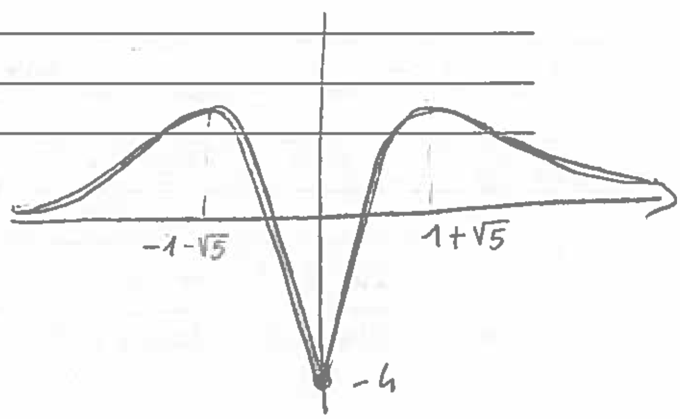
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h^2-4)e^{-|h|} + 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(h e^{-h} + \frac{4(1-e^{-|h|})}{h} \right) = \begin{cases} 4 & \text{se } h \to 0^+ \\ -4 & \text{se } h \to 0^- \end{cases}$$

(Punto angoloso)

- Punti critici: $\begin{cases} x_1 = -1-\sqrt{5} \\ x_2 = 1+\sqrt{5} \end{cases}$

(massimi locali)



Esercizio 4

[4 punti]

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - 5y'(t) - 6y(t) = 9e^{-3t}$$

Risoluzione

1) Integrale generale eq. omogenea: $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \iff \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -1$

$$y_0(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-t}$$

2) Sol. particolare non omogenea: $f(t) = 9e^{-3t} \implies \bar{y}(t) = Ae^{-3t}$

Sostituendo nell'equazione: $(9A + 15A - 6A)e^{-3t} = 9e^{-3t} \implies A = \frac{1}{2}$

3) Integrale generale.

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - (e^x - 1)^2}{\tan(x) - \sin(x)}$$

Risoluzione

Riscriviamo il limite come:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - (e^x-1)^2}{\sin(x) - \sin(x)\cos(x)} \cdot \cos(x)$$

$$\sin(x) - \sin(x)\cos(x) = \sin(x)(1 - \cos(x)) \sim x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^3)$$

$$(e^x - 1)^2 = \left(\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{1}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sin(x^2) - (e^x-1)^2 = x^2 - x^2 - x^3 + o(x^3) \sim -x^3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - (e^x-1)^2}{\sin(x) - \sin(x)\cdot\cos(x)} \cdot \cos(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{\frac{x^3}{2}} = -2$$