D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.1.2019: Compito A (2 turno)

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

(ii) Descrivere il comportamento di $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dare la definizione di differenziabilità in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Scrivere l'equazione del piano tangente a $f(x,y) = x^2y + 2$ nel punto $(1,0)$.

Risoluzione

(i)

(ii) $f(1,0) = 2$ $\quad Df(x,y) = (2xy,\ x^2) \Rightarrow Df(1,0) = (0,1)$

Eq. piano tangente

$y = f(1,0) + Df(1,0)\cdot(x-1,\ y) =$

$= 2 + y$

Esercizio 1

[3 punti]

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (1 - e^x)$ é

- [a] dispari
- ☒ derivabile in $\mathbb{R}$
- [c] non derivabile in 0
- [d] limitata

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\,(1-e^h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\,(-h + o(h^2))}{h} = 0$$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione e $s_0 = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] Se $s_0 < +\infty$, $\{a_n\}_n$ converge
- [b] $a_n < s_0$ definitivamente
- [c] Se $\{a_n\}_n$ converge, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = s_0$
- ☒ $\forall \epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n + \epsilon > s_0$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Per definizione di estremo superiore, $\forall \varepsilon > 0$

$s_0 - \varepsilon$ non è maggiorante

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suriettiva, allora f é

- [a] continua
- [b] strettamente monotona
- ☒ non limitata
- [d] pari

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poiché f è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, allora necessariamente f non è limitata né superiormente né inferiormente

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 16y(t) = 4e^{4t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

- Eq. omogenea: $y'' - 16y = 0$
  Polinomio caratteristico $\lambda^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 4$
  Integrale generale eq. omogenea:
  $$y_0(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t}$$
- Metodo di somiglianza: $f(t) = 4e^{4t} \Rightarrow \bar{y}(t) = Cte^{4t}$
  sostituendo
  $16Cte^{4t} + 8Ce^{4t} - 16Cte^{4t} = 4e^{4t} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$
  Integrale generale eq. non omogenea:
  $$y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t} + \frac{1}{2} t e^{4t}$$
- Dato iniziale
  $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$
  $y'(0) = 1 \Rightarrow 4C_1 - 4C_2 = \frac{1}{2}$

  $C_1 = \frac{1}{16}, \; C_2 = -\frac{1}{16}$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$

Risoluzione

Risolviamo $\int x^3 e^{-x^2} dx \overset{t = x^2}{=} \frac{1}{2} \int t e^{-t} dt = \dots = \frac{1}{2} e^{-x^2}(x^2+1) +$

quindi

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{c \to +\infty} \left[\frac{1}{2} e^{-c^2}(c^2+1) - \frac{1}{2} \right] =$$

$= -\frac{1}{2}$

Esercizio 6 [5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ e classificarli.

Risoluzione

$$Df(x,y) = (3x^2+6y,\ 3y^2+6x)$$

$$\begin{cases} 3x^2+6y=0 & \Longleftrightarrow\ y=-\frac{1}{2}x^2 \\ 3y^2+6x=0 & \Longleftrightarrow\ \frac{3}{4}x^4+6x=0 \Longleftrightarrow 3x(x^3+8)=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x=0,\quad x=-2$$

Punti critici $(0,0)$; $(-2;-2)$

Hessiana $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 6y \end{bmatrix}$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{punto di sella}$$

$$Hf(-2,-2) = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{punto di massimo}$$