Appello del 7.1.2015: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) La funzione $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ é derivabile in $\mathbb{R}$?

Risposta

(i) f è derivabile in x_0 se esiste

$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

(ii) Per $x \neq 0$, f è derivabile. Per $x=0$, f non è derivabile poiché

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} \nexists$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione e fare un esempio di successione monotona decrescente.

(ii) Enunciare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone.

Risoluzione

(i) $\{a_n\}_n$ è monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{\frac{1}{n}\}_n$ è monotona decrescente poiché $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Una successione monotona è regolare. In particolare

1) Se $\{a_n\}_n$ crescente, $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_n \{a_n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

2) Se $\{a_n\}$ decrescente, $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_n \{a_n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Esercizio 1 **[3 punti]**

La successione $\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

- ~~a~~ limitata inferiormente ;
- b diverge;
- c non limitata superiormente;
- d converge.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ pari} \\ n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi $\left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ é decrescente in $\mathbb{R}$. Allora

- a $f' \leq 0$ in $\mathbb{R}$,
- b f é decrescente in $\mathbb{R}$,
- ~~c~~ $f \leq 0$ in $\mathbb{R}$,
- d f é costante.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $F(x)$ è decrescente, $F'(x) = f(x) \leq 0$ (dal teo. fondamentale del calcolo integrale)

Esercizio 3 **[3 punti]**

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia (x_0, y_0) un punto critico di f. Allora (x_0, y_0) é un punto di estremo locale se

- a $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
- b $f_{xx}((x_0, y_0) < 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$
- ~~c~~ $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}((x_0, y_0) > 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 0$
- d $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}((x_0, y_0) > 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti nel caso (c), $\det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ e quindi (x_0, y_0) è un estremo locale

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_1^4 e^{\sqrt{4x}-1}\,dx$$

Risoluzione

Si pone $t=\sqrt{4x}-1$, quindi $x=\frac{(t+1)^2}{4}$, $dx=\frac{(t+1)}{2}\,dt$

$$\int_1^4 e^{\sqrt{4x}-1}\,dx = \int_1^3 \frac{(t+1)}{2}\,e^t\,dt = \left[\frac{(t+1)}{2}e^t\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{e^t}{2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{(t+1)}{2}e^t - \frac{e^t}{2}\right]_1^3 = 2e^3 - \frac{e^3}{2} - e + \frac{e}{2}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\frac{\sin(-x)}{x}+e^x}{x^2}$$

Risoluzione

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{\sin(-x)}{x} = \left[-x - \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3)\right]\cdot\frac{1}{x} = -1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$\ln(1-x) + \sin(-x)/x + e^x = -x - \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{3!} + 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\frac{\sin(-x)}{x}+e^x}{x^2} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}\, y^2(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Equazione a variabili separabili con $g(y) = y^2$, $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}$

Poiché $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R})$, esiste un'unica sol. in $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$

- Sol stazionarie

$g(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$; quindi $y(t) = 0$ è sol. del problema se $y(0) = 0$

- Se $\alpha \neq 0$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2}\, dr = \int_0^t \frac{\cos(r)}{1+2\sin(r)}\, dr$$

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} \lg(1+2\sin(t))$$

$$\iff y(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\lg(1+2\sin(t))} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{2}\lg(1+2\sin(t))}$$