Appello del 2.7.2012: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+1+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivate direzionali di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nel punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e nella direzione $v \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Calcolare le derivate direzionali di $f(x, y) = e^{xy}$ in $(1, 1)$ nella direzione $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

(iii) Fare un esempio di una funzione f continua, ma non derivabile in $(0, 0)$.

Risposta

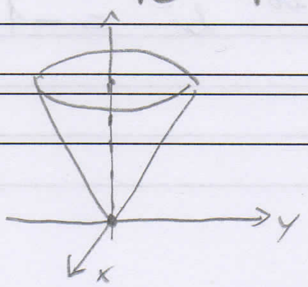
(i)

(ii) Dal teo. del gradiente : $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = Df(x,y)\cdot v$

$Df(1,1)=(e,e) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \frac{e}{\sqrt{2}}+\frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{2e}{\sqrt{2}}$

(iii)

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Sotto quali condizioni una funzione $f : I \to J$, ove $I, J \subset \mathbb{R}$, é invertibile?

(ii) Enunciare il teorema sulla derivata della funziona inversa

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata e $M = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] se $\lim_{n\to\infty} a_n = M$, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente
- [X] [b] $\forall\epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n + \epsilon > M$;
- [c] $a_n < M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- [d] $\lim_{n\to\infty} a_n = M$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per def. di estremo superiore

Esercizio 2

[3 punti]

$(i)^{27} =$

- [a] i
- [b] $-i$
- [c] 1
- [d] -1

Risoluzione (giustificare la risposta)

$(i)^{27} = (i)^{26} \cdot i = -1 \cdot (i^2)^{13} = i \cdot (-1)^{13} = -i$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $(0,0)$ un punto critico per f. Allora

- [a] $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0$
- [X] [b] $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ se $v = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$
- [c] $\det(Hf(0,0)) < 0$
- [d] $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) > 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema del gradiente e poiché $Df(0,0) = (0,0)$ PUNTO CRITICO

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = Df(0,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

B

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x) - x^2}{x\ln(1+x^2)}$$

Risoluzione

$x \ln(1+x^2) \sim x \cdot x^2 \sim x^3$

$e^x - \cos(x) - \sin(x) - x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2}$

$- x + \frac{x^3}{3!} - x^2 + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x) - x^2}{x\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{9+\tan(x)}}\,dx$$

Risoluzione

$t = \tan(x) \qquad dt = \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$

$x = 0 \implies t = 0$

$x = 1 \implies t = \tan(1) = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^1 \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{9+\tan(x)}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sqrt{9+t}} =$

$= 2\left[\sqrt{9+t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{9+\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{9}$

3+B

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare i punti critici di $f(x,y) = y - y^3 - yx^2$ e classificarli

Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$\boxed{\text{Punti critici}}$ $Df(x,y) = (-2xy,\ 1-3y^2-x^2) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2+3y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ $P_{1,2} = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\begin{cases} y=0 \\ x^2=1 \end{cases}$ $P_{3,4} = (\pm 1, 0)$

$\boxed{\text{Studio dei punti critici}}$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{bmatrix}$$

- $Hf(P_1) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det(Hf(P_1)) > 0 \\ f_{xx}(P_1) < 0 \end{cases}$ P_1 punto di max. loc

- $Hf(P_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det(Hf(P_2)) > 0 \\ f_{xx}(P_2) > 0 \end{cases}$ P_2 punto di

- $Hf(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det Hf(P_3) = -4 < 0 \\ P_3 \text{ punto di sella} \end{cases}$

- $Hf(P_4) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det Hf(P_4) = -4 \\ P_4 \text{ punto di sella} \end{cases}$