E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 15.2.2013: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+2 punti]

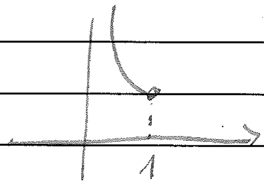
(i) Dare la definizione di continuità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non limitata nell'intervallo $(0, 1)$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = \frac{1}{x}$



Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di $f = o(g)$ per $x \to x_0$

(ii) Enunciare il Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Lagrange.

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ é

- [a] $\nexists$;
- [b] 0 ~~b~~
- [c] 1;
- [d] 1 e 0

Risoluzione (giustificare la risposta)

$A := \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \text{ pari}\right\} \cup \left\{1 - \frac{1}{n} : n \text{ dispari}\right\}$

$\inf A = \inf\left\{1 - \frac{1}{n} : n \text{ dispari}\right\} = 1 - 1 = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $T_2(x)$ il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 6 + \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $T_2(1)$ vale

- [a] 6
- [b] 0
- [c] 7
- [d] 4

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = \sqrt{1+x^2}$ (teo. fondamentale calcolo integrale) $\Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f''(0) = 0$

$T_2(x) = 6 + x$ e $T_2(1) = 7$

Esercizio 3

[3 punti]

$(1 + i)^7$ é uguale a

- [a] $64(1 - i)$
- [b] $64(i - 1)$
- [c] $8(1 - i)$ ~~c~~
- [d] $8(i - 1)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$(1+i)^7 = 2^{7/2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = 2^{7/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= 8(1 - i)$

Esercizio 4

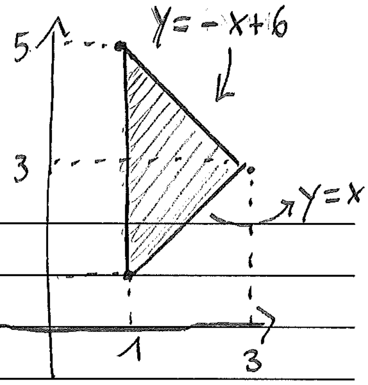
[5 punti]

Calcolare

$$\iint_D xy\ dxdy$$

ove D é il triangolo di vertici $(1,1)$, $(3,3)$ e $(1,5)$.

Risoluzione



D è un dominio y-semplice dato da

$$D = \{(x,y) : x \in [1,3],\ x \leq y \leq -x+6\}$$

$$\iint_D xy\ dxdy = \int_1^3 \int_x^{-x+6} xy\ dy\,dx = \int_1^3 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{-x+6} dx =$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{x(-x+6)^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right] dx = \int_1^3 \left(\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{2}} - 6x^2 + 18x - \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{2}}\right) dx =$$

$$= \left[-\cancel{6}^{2}\frac{x^3}{\cancel{3}_1}\right]_1^3 + \left[\cancel{18}^{9}\frac{x^2}{\cancel{2}_1}\right]_1^3 = 20$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\cos(x) - \frac{x}{\sin(x)}\right)$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos(x)\sin(x) - x}{\sin(x)}\right)$$

$x^2 \sin(x) \sim x^3$ per $x \to 0$

$$\cos(x)\sin(x) - x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} - x + o(x^3) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3}x^3$$

quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos(x)\sin(x) - x}{\sin(x)}\right) = -\frac{2}{3}$

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il grafico della funzione $f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$.

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

$f(x) = 0 \iff x = -1$ e $f(x) > 0$ per $x > -1$

$f(x) < 0$ per $x < -1$

$f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \left[1 - \frac{(x+1)}{(x-1)^2} \right] = e^{\frac{x}{x-1}} \left[\frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2} \right]$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ e $x = 3$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (0,1) \cup (1,3)$

$x = 0$ punto di massimo locale $(f(0) = 1)$

$x = 3$ punto di minimo locale $(f(3) > 0)$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0$