D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.2.2015: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivate parziali per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Trovare il dominio di definizione e le derivate parziali di $f(x, y) = x^y$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x,y) = e^{y\ln(x)}$, $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0\}$

$f_x(x,y) = e^{y\ln(x)} \cdot \frac{y}{x}$ $f_y(x,y) = e^{y\ln(x)} \cdot \ln(x)$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Weierstrass.

(ii) Mostrare con un esempio che il Teorema di Weierstrass non vale in un intervallo non limitato

Risoluzione

(i)

(ii) $f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$, $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$,

mentre minimo e massimo non esistono

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Allora

- [a] $\{a_n\}$ non é monotona;
- [b] $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste finito;
- [X] $\exists \alpha > 0$ tale che $e^{a_n} > \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$;
- [d] $|a_n| \leq 4\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ è limitata e monotona crescente

b) $a_n = (-1)^n$ limitata, non convergente

c) $a_n = 100\ \forall n \in \mathbb{R}$

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni limitate tali che $f(0) = 0$ e $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora la funzione prodotto $h = fg$

- [a] non é continua in 0
- [b] é derivabile in 0 e $h'(0) \neq 0$
- [X] é derivabile in 0 e $h'(0) = 0$
- [d] é continua, ma non derivabile in 0.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)\cdot g(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)\cdot o(x)}{x} = 0,$$ perché f limitata. Quindi $h'(0) = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che che $f(1) = 2$, $f'(x) = \cos(x^2)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora $\forall c \in \mathbb{R}$

- [X] $f(c) = 2 + \int_1^c \cos(t^2)dt$
- [b] $f(c) = 1 + \int_2^c \cos(t^2)dt$
- [c] $f(c) = 2\int_1^c \cos(t^2)dt$
- [d] $f(c) = \int_2^c \cos(t^2)dt$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f(c) = f(1) + \int_1^c f(t)\,dt = 2 + \int_1^c \cos(t^2)\,dt$$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

- Eq omogenea: $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$, quindi $y_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$
- Metodo di somiglianza $\bar{y}(t) = (At + B)\, t\, e^t = (At^2 + Bt)e^t$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \bar{y}(t) = \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t\right)e^t$$

- Int. generale eq. non omogenea $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t\right)e^t$
- $y(0) = C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$

$$y'(0) = C_1 - C_2 - \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow C_1 - C_2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{5}{8} \\ C_1 = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{5}{8}e^t - \frac{5}{8}e^{-t} + \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t\right)e^t$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{\sin(x^4)}$$

Risoluzione

$\sin(x^4) \sim x^4$

$\ln(1 + x^2) = +x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{\sin(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{x^4} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6 **[5 punti]**

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Risoluzione

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(0) = e^{-1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e$ (Asintoto orizzontale)

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ (asint. verticale) da destra

$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$