D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 19.1.2021: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

(ii) Fare un esempio di successione limitata, ma non convergente.

Risposta

(i)

(ii)

$a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema di Fermat* (per la caratterizzazione degli estremi locali).

(ii) Fare un esempio di una funzione tale che un suo punto critico non sia punto di estremo locale.

Risoluzione

(i)

(ii)

$f(x) = x^3$ $\quad$ $x_0 = 0$ è un punto critico ma non è di estremo locale

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente a termini positivi. Allora

$\boxed{a}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$;

$\boxed{b}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monotona

$\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ non converge;

$\boxed{\cancel{d}}$ $\{\sin(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Per la CN, poichè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$
e quindi $\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = x^8 \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ é tale che

$\boxed{a}$ non é derivabile in 0

$\boxed{b}$ é monotona non decrescente

$\boxed{\cancel{c}}$ $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$

$\boxed{d}$ ha limite $-\infty$ per $x \to -\infty$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$f(x) = x^8 \sin(x)$ è una funzione dispari, quindi
$\int_{-3}^{3} x^8 \sin(x)\, dx = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare tale che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin(x^2)} = 1$. Allora il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in $x_0 = 0$ é

$\boxed{a}$ $T_2(x) = 1$;

$\boxed{b}$ $T_2(x) = 1 + x^2$;

$\boxed{c}$ $T_2(x) = x^2$;

$\boxed{d}$ $T_2(x) = \ln(1 + x^2)$.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poichè $\sin(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$, allora
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow T_2(x) = x^2$
(si noti che $\ln(1+x^2)$ non è un polinomio!)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

Risoluzione

$$e^{x^2} - e^{x^3} = \left(x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)\right) - \left(x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= x^2 + o(x^2) \sim x^2 \text{ per } x \to 0$$

$$e^x - \sin(x) - \cos(x) = \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) - \left(\cancel{x} + o(x^2)\right)$$

$$- \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{x^2} = 1$$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)y'(t) = e^{-y(t)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{e^{-y(t)}}{t^2+1} \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad g(y) = e^{-y}; \; h(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

- $\exists!$ sol. del pb. di Cauchy in un intorno di $t_0 = 0$
- Sol. stazionarie: $e^{-\alpha} = 0$ impossibile
- $\displaystyle\int_\alpha^{y(t)} e^r \, dr = \int_0^t \frac{1}{1+r^2} \, dr \iff e^{y(t)} - e^\alpha = \arctan(t)$

$$\iff y(t) = \ln\left(e^\alpha + \arctan(t)\right)$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = (x^2+1)e^{-|x|}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ non si annulla mai
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- f pari $\left(f(-x) = ((-x)^2+1)e^{-|-x|} = f(x) \right)$

Derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} & \text{per } x > 0 \\ 2xe^{x} + (x^2+1)e^{x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Studio per $\boxed{x > 0}$

$f'(x) = 0 \iff e^{-x}(-x^2+2x-1) = 0 \iff x^2-2x+1=0$

$\iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$ (punto critico)

$f'(x) > 0 \iff -e^{-x}(x-1)^2 > 0$ mai!!

quindi $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

Analogamente $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (-\infty, 0)$

Quindi $x=1$ è un punto di massimo locale

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$

quindi f non è derivabile in $x=0$