Appello del 9.9.2024: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(ii) Descrivere il comportamento della successione $\{n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

(ii) Calcolare la derivata di $F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ in $x = 1$.

Risoluzione

(i)

(ii) $F'(x) = e^{x^2} \implies F'(1) = e$

Esercizio 1

[3 punti]

L'equazione $z^2 - iz - i + 1 = 0$ nel campo complesso ha

- [x] a due soluzioni
- [ ] b nessuna soluzione
- [ ] c infinite soluzioni
- [ ] d una soluzione.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Un'equazione di grado 2 ha sempre due soluzioni nel campo complesso

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $(x-1) \cdot f(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora

- [ ] a f é derivabile in $x_0 = 1$
- [ ] b f é decrescente
- [ ] c $f(x) = 1 - x$
- [x] d $f(1) = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $f(x) \leq 0$ se $x-1>0$ e $f(x) \geq 0$ se $x-1<0$ e f è continua allora $f(1)=0$

Esercizio 3

[3 punti]

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n - n^e}$ é

- [ ] a divergente a $+\infty$;
- [x] b convergente;
- [ ] c oscillante;
- [ ] d nessuna delle precedenti.

Risoluzione

$$\frac{1}{e^n - n^e} = \frac{1}{e^n\left(1 - \underbrace{\frac{n^e}{e^n}}_{o(e^n)}\right)} \sim \frac{1}{e^n} \text{ per } n \to \infty$$

e $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n < +\infty$ (serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{e}$)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos(x) dx$.

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) =$$

$$= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2\int \cos(x)\, dx =$$

$$= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2\sin(x) + C$$

$$\int_0^{\pi/4} x^2 \cos(x)\, dx = \Big[x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) \Big]_0^{\pi/4}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x^2)}$$

Risoluzione

$$x \sin(x^2) \sim x^3$$

$$x\cos(x) - \sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) =$$

$$= -\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x \sin^2(x)} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare e disegnare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 2}$$

Risoluzione

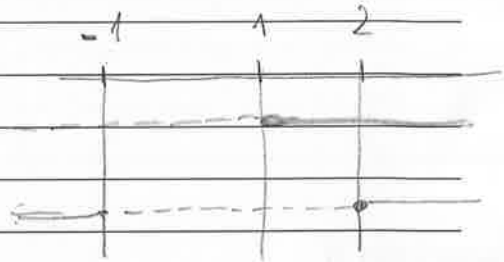
- $x^2 - x - 2 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

  Quindi: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

- $f(x) = 0 \iff x = 1$

  $f(x) > 0 \iff$

  $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$



- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

- $f'(x) = \frac{-(x^2 - 2x + 3)}{x^2 - x - 2}$

  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$, quindi f è decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-1, 2)$, in $(2, +\infty)$