Appello del 8.7.2021: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

(i) dare la definizione di successione delle ridotte n-sime;

(ii) dare la la definizione di convergenza.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dare la definizione di derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$.

(ii) Trovare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ nel punto $(1, 1)$

Risoluzione

(i)

(ii) $y = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$f(1,1) = \ln(3)$ $\quad f_x(x,y) = \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$

$y = \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1)$

Esercizio 1 [3 punti]

L'estremo inferiore dell'insieme $\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

- [ ] a non esiste
- [ ] b $-\infty$;
- [ ] c 1;
- [x] d 0.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Si ha $1 + \frac{(-1)^n}{n} \geq 0 \; \forall n$, Inoltre per $n=1$, si ha $1 + \frac{(-1)^1}{1} = 0$, quindi inf = min è uguale a 0

Esercizio 2 [3 punti]

Se f é una funzione continua tale che $\int_0^x f(t)dt = x^2 + x$, allora $f(1)$ vale

- [ ] a 0
- [ ] b 4
- [ ] c $-\infty$
- [ ] d 3.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale $f(x) = \frac{d}{dx}(x^2+x) = 2x+1$, quindi $f(1) = 3$

Esercizio 3 [3 punti]

La funzione $f(x) = e^{5x} + 8x$

- [ ] a ha un punto critico
- [ ] b é limitata
- [x] c ha uno zero negativo
- [ ] d é decrescente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiche $f(0) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la funzione ha almeno uno zero negativo

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int \frac{2x+4}{x^2+5x+4}dx$$

Risoluzione

Integrale di funzione razionale

$x^2+5x+4=0 \iff x=-1\ ,\ x=-4$

$$\frac{2x+4}{x^2+5x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x+1)}{x^2+5x+4} \iff \begin{cases} A+B=2 \\ 4A+B=4 \end{cases}$$

$\iff A=\frac{2}{3}\ ,\ B=\frac{4}{3}$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+4} = \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x+4| + c$$

Esercizio 5

[4 punti]

Dimostrare per induzione la formula $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$.

Risoluzione

- Base induzione ($n=1$): $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2 \iff 2-1=1^2$
- Passo induttivo:

Ip: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ TESI: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=(n+1)^2$

dim: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) =$

$= n^2+2n+1 = (n+1)^2$

Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) + 4y'(t) = te^t$$

Risoluzione

- Eq. omogenea: $y'' + 4y' = 0$

Pol. caratteristico $\lambda^2 + 4\lambda = 0 \iff \lambda = 0,\ \lambda = -4$

Int. generale eq. omogenea: $y_0(t) = C_1 + C_2 e^{-4t}$

- Sol. particolare:

$f(t) = te^t$ $\quad \begin{cases} m = 1 \\ \gamma = 1 \\ \delta = 0 \end{cases}$ $\gamma + i\delta = 1$ non è sol. del polinomio caratteristico, quindi $K = 0$

$\bar{y}(t) = (At + B)e^t$

$\bar{y}'(t) = (At+B)e^t + Ae^t$

$\bar{y}''(t) = Ae^t + (At+B)e^t + Ae^t = (At+B)e^t + 2Ae^t$

$(At+B)\cancel{e^t} + 2A\cancel{e^t} + 4(At+B)\cancel{e^t} + 4A\cancel{e^t} = t\cancel{e^t} \iff$

$(A + 4A)t + (B + 2A + 4B + 4A) = t$

$\begin{cases} 5A = 1 \\ 5B + 6A = 0 \end{cases} \iff A = \frac{1}{5},\ B = -\frac{6}{5}A = -\frac{6}{25}$

$\bar{y}(t) = \left(\frac{1}{5}t - \frac{6}{25}\right)e^t$

- Integrale generale

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} + \left(\frac{1}{5}t - \frac{6}{25}\right)e^t$$