| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| E6 | |
| $\Sigma$ | |

**Appello del 8.6.2021: Compito A**

**Nome:** **Cognome:** **Matricola:**

## Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Fare un esempio di una successione (non costante) convergente al limite $\ell = e^{\pi}$

**Risposta**

(i)

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\left(\pi+\frac{1}{n}\right)}$

## Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli zeri

(ii) Verificare che l'equazione $e^{x^2+1}\ln(x-1)=2$ ammette almeno una soluzione positiva.

**Risoluzione**

(i)

(ii) $f(x) = e^{x^2+1}\ln(x-1)-2 \quad x\in(1,+\infty)$

$f(2)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $f$ continua,

allora esiste uno zero in $(2,+\infty)$

## Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia data la funzione $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Allora $(f^{-1})'(0)$ vale

- [a] $\pi$
- [b] ☒ $\frac{1}{2}$;
- [c] 1;
- [d] $+\infty$.

**Risoluzione (giustificare la risposta)**

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ quindi $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biettiva; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$

## Esercizio 2 **[3 punti]**

Il polinomio di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x) = x \ln(\cos(x))$ in $x_0 = 0$ é dato da

- [a] 0
- [b] $\frac{x^2}{2}$
- [c] ☒ $-\frac{x^3}{2}$
- [d] $\frac{x^4}{4!}$.

**Risoluzione (giustificare la risposta)**

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^2)$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$x \ln(1 + \cos(x) - 1) = x\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{x}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \dots$

$= -\frac{x^3}{2} + o(x^4)$

## Esercizio 3 **[3 punti]**

La derivata direzionale di $f(x,y) = x^y$ nel punto $(e,1)$ e nella direzione $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale

- [a] $1/\sqrt{2}$
- [b] 0
- [c] ☒ $(e+1)/\sqrt{2}$
- [d] $\sqrt{2}/2$

**Risoluzione (giustificare la risposta)**

$f(x,y) = e^{y\ln(x)}$ $\quad f_x(x,y) = e^{y\ln(x)} \cdot \frac{y}{x}$; $f_y(x,y) = e^{y\ln(x)} \cdot \ln(x)$

$f_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(e,1) = f_x(e,1)\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(e,1)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{e}{\sqrt{2}}$

## Esercizio 4

**[4 punti]**

Calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^x) - \ln(x)}{1 - \cos(x-1)}$$

### Risoluzione

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \ln(x) - \ln(x)}{1 - \cos(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\ln(x)}{1-\cos(x-1)} \overset{t=x-1}{=} \lim_{t \to 0} \frac{t \ln(1+t)}{1-\cos(t)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{\frac{t^2}{2}} = 2$$

$$\begin{cases} \ln(1+t) \sim t & \text{per } t \to 0 \\ 1-\cos(t) \sim \frac{t^2}{2} & \text{per } t \to 0 \end{cases}$$

## Esercizio 5

**[4 punti]**

Studiare la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} dx$$

### Risoluzione

L'integrale è improprio per il dominio illimitato, poiché $x^2+3x+2 \neq 0$ in $(0,+\infty)$. Poiché

$$\frac{1}{x^2+3x+2} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è convergente, allora $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} dx$ è convergente

## Esercizio 6

**[5 punti]**

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = te^{t^2+y(t)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

**Risoluzione**

Eq. a variabili separabili $y'(t) = e^{y(t)} \cdot te^{t^2}$

con $g(y) = e^y$, $f(t) = te^{t^2}$, quindi esiste una sol. locale del problema

1) Sol. stazionarie: $g(\alpha) = e^\alpha \neq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e quindi non ci sono sol. stazionarie

2) $\displaystyle\int_\alpha^{y(t)} \frac{dr}{e^r} = \int_0^t re^{r^2} dr$

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dr}{e^r} = \int e^{-r} dr = -e^{-r} + c \\ \displaystyle\int re^{r^2} dr \underset{\substack{t = r^2 \\ dt = 2r\,dr}}{=} \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{r^2} + c \end{cases}$$

da cui

$$\left[-e^{-r}\right]_\alpha^{y(t)} = \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^t \iff e^{-\alpha} - e^{-y(t)} = \frac{1}{2}e^{t^2} - \frac{1}{2}$$

$$\iff e^{-y(t)} = e^{-\alpha} + \frac{1}{2}(1 - e^{t^2}) \iff y(t) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\alpha} + \frac{1}{2}(1 - e^{t^2})}\right).$$