D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 8.6.2016: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

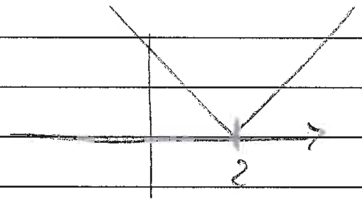
(i) Dare la definizione di derivata per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non derivabile nel punto $x_0 = 2$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = |x-2|$



Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

(ii) Dimostrare che due primitive di una funzione continua $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differiscono per una costante

Risoluzione

(i)

(ii) Sia $F, G : (a,b) \to \mathbb{R}$ t.c. $F'(x) = G'(x) = f(x)$

Allora $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

e quindi $F - G = \text{cost}$ in (a,b)

Esercizio 1

[3 punti]

Se entrambe le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hanno un punto di massimo assoluto in 0, allora

a la funzione $|fg|$ é limitata;

b la funzione $f + g$ é derivabile in 0 con $(f+g)'(0) = 0$;

☒ c $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) + g(x) \leq M \ \forall x \in \mathbb{R}$;

d $f(x) \cdot g(x) \leq f(0) \cdot g(0) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Sia $M_1 = \max_{\mathbb{R}} f = f(0)$, $M_2 = \max_{\mathbb{R}} g = g(0)$, allora

$f(x) + g(x) \leq M_1 + M_2 = M$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \cos(x)$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Allora f ha in 0 un punto di

a massimo relativo

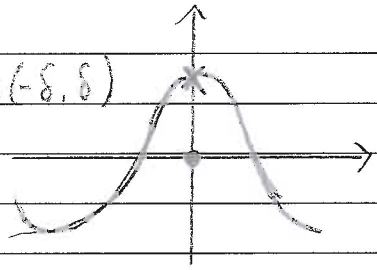
b crescenza stretta

☒ c minimo relativo

d decrescenza stretta.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal grafico, $f(0) = 0 \leq f(x) \ \forall x \in (-\delta, \delta)$



Esercizio 3

[3 punti]

Se $z \in \mathbb{C}$ é tale che $z^3 = \cos(8) + i\sin(8)$, allora $|z|$ vale

☒ a 1

b 2

c $i/\sqrt{2}$

d $\sqrt{2}/2$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Se $z^3 = \rho(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ allora $|z| = \rho^{\frac{1}{3}}$, quindi

$|z| = \sqrt[3]{1} = 1$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\ln(1+x^2)} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)} \right)$$

Risoluzione

- $e^x \sim 1$ per $x \to 0$
- $\ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$
- $\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)} = \frac{\sin^2(x) - x^2}{x \sin(x)}$

$\sin^2(x) - x^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2 = x^2 - 2\frac{x^4}{6} - x^2 + o(x^4)$

$= -\frac{1}{3}x^4 \Longrightarrow \frac{e^x}{\ln(1+x^2)}\left(\frac{\sin^2(x) - x^2}{x\sin(x)}\right) \sim \frac{-\frac{1}{3}x^4}{x^4} \sim -\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\ln(1+x^2)}\left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)}\right) = -\frac{1}{3}$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy^2 + 6$.

Risoluzione

f è di classe $C^2(\mathbb{R})$, $Df(x,y) = (2x - 2y^2, 2y - 4xy)$

$$\begin{cases} 2x - 2y^2 = 0 \iff x = y^2 \\ 2y - 4xy = 0 \iff 2y(1 - 2y^2) = 0 \nearrow y = 0 \quad \searrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Punti critici: $P_0 = (0,0)$, $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -4y \\ -4y & 2-4x \end{bmatrix}$$

P_0: punto di minimo, P_1, P_2: punti di sella

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{x+\frac{3}{x}}$ e tracciarne un grafico approssimato.

Risoluzione

- Dominio : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Derivata

$$f'(x) = e^{x + 3/x}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \\ f'(x) > 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \\ f'(x) < 0 \quad \text{per } x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}) \end{cases}$$

$x_0 = +\sqrt{3}$ punto di minimo locale

$x_1 = -\sqrt{3}$ punto di massimo locale