Appello del 7.2.2023: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+2+1 punti]

(i) Data la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. definire la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle ridotte n-esime

(ii) Dare la definizione di convergenza per la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

(iii) Per quali α la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge?

Risposta

(i)

(ii)

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ per $\alpha > 1$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Fermat per la caratterizzazione dei punti di estremo locale.

(ii) Mostrare con un esempio che il Teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria, ma non sufficiente per gli estremi

Risoluzione

(i)

(ii) $f(x) = x^3$, allora $f'(0) = 0$ ma 0 non è un punto di estremo locale

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $a_n = 2^n - n^{500} + \sin(n\pi/2)$, $n \in \mathbb{N}$ é

- [ ] a) indeterminata
- [ ] b) convergente
- [x] c) diveregente a $+\infty$
- [ ] d) diveregente a $-\infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{n\to\infty} 2^n - n^5 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^n\left(1 - \frac{n^5}{2^n} + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^n}\right)$$

$= +\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = (x^6 + x^4)e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$,

- [ ] a) non é derivabile in 0
- [x] b) é limitata in $\mathbb{R}$
- [ ] c) verifica $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- [ ] d) é monotona in $(-\infty, 0])$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, allora f è limitata in $\mathbb{R}$ poichè $|f(x)| < 1$ $\forall x \in (-\infty, -K) \cup (K, +\infty)$ per K grande e per il teo. di Weierstrass f è limitata in $[-K, K]$

Esercizio 3

[3 punti]

Tra le funzioni $f(x) = x^5 \ln^6(x)$, $g(x) = x^4 \ln^3(x)$, $h(x) = x^6 \ln(x)$, quali sono quella che cresce piu' velocemente e quella che cresce piu' lentamente per $x \to +\infty$

- [ ] a) f, g
- [x] b) h, g
- [ ] c) g, f
- [ ] d) f, h

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti x^α, per $\alpha > 0$, cresce più velocemente di $\ln^\beta(x)$, $\beta > 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^2} + \ln(1+x^2)}{x^2(e^{x^2}-1)}$$

Risoluzione

$e^{x^2} - 1 \sim x^2 \implies x^2(e^{x^2}-1) \sim x^4$

$\cos(x^2) - e^{x^2} + \ln(1+x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \theta(x^4) - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2!} + \theta(x^4)$

$+ x^2 - \frac{x^4}{2} + \theta(x^4) = x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \theta(x^4) =$

$= -\frac{3}{2}x^4 + \theta(x^4) \sim -\frac{3}{2}x^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^2} + \ln(1+x^2)}{x^2(e^{x^2}-1)} = -\frac{3}{2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{2t} \cdot t$$

Risoluzione

- eq. omogenea: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0$

$$y_0(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

- sol. particolare

$f(t) = e^{2t}\, t \longrightarrow \bar{y}(t) = (At + B)e^{2t}$

$\bar{y}'(t) = e^{2t} \cdot 2(At+B) + Ae^{2t}$

$\bar{y}''(t) = e^{2t} \cdot 4(At+B) + 2e^{2t}A + 2Ae^{2t} = 4e^{2t}(At+B) + 4Ae^{2t}$

$4e^{2t}(At+B) + 4Ae^{2t} - 4e^{2t}(At+B) - 2Ae^{2t} + (At+B)e^{2t} = te^{2t}$

$$\begin{cases} A = 1 \\ 4A - 2A + B = 0 \implies B = -2 \end{cases}$$

- Integrale generale

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + (t-2)e^{2t}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^4)}{x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo

Risoluzione

- Dominio: $x^4 > 0,\ x \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Simmetria: $f(-x) = \frac{\ln((-x)^4)}{-x} = -\frac{\ln(x^4)}{x} = -f(x)$

$\Rightarrow f$ dispari

$\rightarrow$ Studiamo la funzione in $(0, +\infty)$: $f(x) = 4\frac{\ln(x)}{x}$

- Segno: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(x) > 0$ in $(1, +\infty)$, $f(x) < 0$ in $(0, 1)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

- Derivata: $f'(x) = 4\frac{(1 - \ln(x))}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, e)$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (e, +\infty)$