D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 6.7.2015: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to 4} f(x) = 7$.

(ii) Fare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 4} f(x)$ non esiste.

Risposta

(i)

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il *Teorema fondamentale del calcolo integrale.*

(ii) Trovare i punti critici, se esistono, della funzione $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$

Risoluzione

(i)

(ii)

Poichè $F'(x) = e^{x^2}$, allora F non ammette punti critici

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $\frac{n+1}{n+2}$

- [a] é superiormente limitata ma non converge;
- [b] non é limitata;
- [c] é decrescente e convergente;
- [X] é inferiormente limitata e crescente.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$, quindi la successione è inferiormente limitata e crescente

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare tale che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\ln(1+x^2)} = 1$. Allora il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in $x_0 = 0$ é

- [a] $T_2(x) = 1$;
- [X] $T_2(x) = 1 + x^2$;
- [c] $T_2(x) = x^2$;
- [d] $T_2(x) = \ln(1 + x^2)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\ln(1+x^2)} = 1 \Leftrightarrow f(x)-1 \sim \ln(1+x^2) \sim x^2$, quindi $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$, da cui $T_2(x) = 1 + x^2$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x > 0; \\ a, & x \leq 0. \end{cases}$ Allora f é continua in $\mathbb{R}$ per

- [a] $a = 0$
- [b] $a = -\infty$
- [X] $a = 1$
- [d] nessun a

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, allora f è continua in $\mathbb{R}$ se $a = 1$, cioè se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ (per $x \neq 0$, f è continua)

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + y^2(t) = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

$y' + y^2 = 0 \iff y'(t) = -y^2(t)$, quindi eq. a variabili separabili con $g(y) = -y^2$, $f(t) = 1$. Condizioni di esistenza ed unicità locale verificate

1) Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff -\alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$
quindi se $y(0) = 0$, allora $y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

2) $\int_\alpha^{y(t)} -\frac{1}{r^2}\,dr = \int_0^t dr \iff \left[\frac{1}{r}\right]_\alpha^{y(t)} = t \iff \frac{1}{y(t)} = t - \frac{1}{\alpha}$

$\iff y(t) = \frac{\alpha}{\alpha t - 1}$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 2x^3 + 6xy + 3y^2$ e classificarli

Risoluzione

$Df(x,y) = (6x^2 + 6y, 6x + 6y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ -x = +y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ -x = +y \end{cases}$

$\iff P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,-1)$ (punti critici)

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0)$ punto di sella

$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (1,-1)$ punto di minimo locale

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{|x|}{x^2+x-2}$ e tracciarne un grafico approssimativo

Risoluzione

$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1$ e $x = -2$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$$\begin{cases} \lim_{x \to \pm} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty , \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty , \lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x < -2 \text{ e } x > 1 \\ < 0 & \text{se } x \in (-2, 1) \end{cases} \\ f(x) = 0 \iff x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{(x^2+2)}{(x^2+x-2)^2} & x > 0 \\ \frac{(x^2+2)}{(x^2+x-2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x > 0 \\ > 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$