Appello del 6.2.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

(i) definire la successione delle ridotte N-esime;

(ii) dare la definizione di convergenza della serie;

(iii) fare un esempio di serie oscillante.

Risposta

(i) ______________________________

____

(ii) ______________________________

____

(iii) ______________________________

Domanda 2

[2+3 punti]

Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$,

(i) dare la definizione di derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$;

(ii) enunciare il Teorema del Gradiente.

Risoluzione

(i) ______________________________

____

____

____

____

____

(ii) ______________________________

____

____

____

____

____

____

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua, allora

- [a] f é limitata superiormente;
- [b] $\lim_{x\to-\infty} f(x) < +\infty$;
- [c] $f(x)^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- [X] esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in (-\pi, \pi)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per il teo. di Weierstrass, f è limitata in $[-\pi,\pi]$ e quindi in $(-\pi,\pi)$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = e^{1+|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}$,

- [X] é derivabile in 0
- [b] é monotona
- [c] é dispari
- [d] ha massimo assoluto in $\mathbb{R}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{h\to0} \frac{e^{1+|h|^3}-e}{h} = \lim_{h\to0} e \cdot \underbrace{\frac{(e^{|h|^3}-1)}{|h|^3}}_{\to 1} \frac{|h|^3}{h} = 0$$

Esercizio 3

[3 punti]

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $b_n \neq 0$ e $a_n = \cos(b_n)/\cosh(b_n)$

- [a] $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$
- [b] $\{a_n\}$ non é limitata
- [c] $\{a_n\}$ converge se $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$
- [d] $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$-\frac{1}{\cosh(b_n)} \leq \frac{\cos(b_n)}{\cosh(b_n)} \leq \frac{1}{\cosh(b_n)} \qquad (-1 \leq \cos(b_n) \leq 1)$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \cosh(b_n) = +\infty$, per il teo. del confronto

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + \ln(1+x)}{\tan(x) - x}$$

Risoluzione

Possiamo riscrivere il limite come $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x) \frac{e^{-x}-1+\ln(1+x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$

$$\sin(x) - x\cos(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$e^{-x} - 1 + \ln(1+x) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - 1 + \left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) =$$

$$= +\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

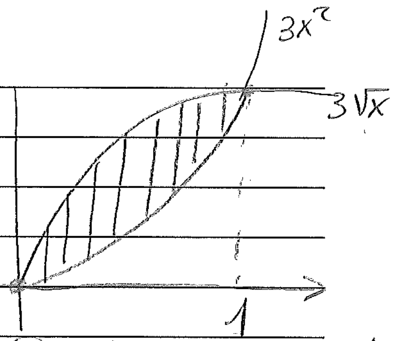
$$\lim_{x\to 0} \cos(x) \frac{e^{-x}-1+\ln(1+x)}{\sin(x) - x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 \le y \le 3\sqrt{x}\}$ (disegnare il dominio).

Risoluzione



Dominio Y-semplice

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{3x^2}^{3\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{3x^2}^{3\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^{3/2} + \frac{9}{2}x - 3x^3 - \frac{9}{2}x^4\right) dx$$

$$= \left[\frac{6}{5}x^{5/2} + \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{9}{10}x^5\right]_0^1 =$$

$$= \frac{6}{5} + \frac{9}{4} - \frac{3}{4} - \frac{9}{10} = \frac{3}{10} + \frac{3}{2} = \frac{18}{10}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sin(t)$ con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Risoluzione

Eq. del 2º ordine a coeff. costanti non omogenea

- Eq. omogenea: $y'' - 2y' + 2y = 0$

Pol. caratteristico: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \mapsto \lambda = 1 \pm i$

$$y_0(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t)$$

- Sol. particolare (Metodo di somiglianza)

$$f(t) = \sin(t) \qquad \left.\begin{array}{l} m = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 1 \end{array}\right\} \pm i \text{ non è sol. dell'eq. caratt.}$$

$$\bar{y}(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

Sostituendo nell'eq. si ottiene $\begin{cases} A - 2B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{array}$

- Sostituendo le condizioni iniziali in

$$y(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t) + \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$$

si ottiene $y(0) = C_1 + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{5}$

Derivando e calcolando in $t=0$

$$y'(0) = -\frac{2}{5} + C_2 + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{5}$$

da cui

$$y(t) = -\frac{2}{5} e^t \cos(t) + \frac{1}{5} e^t \sin(t) + \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$$