Appello del 5.2.2018: Compito B

Nome: Cognome: Matricola:

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| E6 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1

[2+2+1 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dare la definizione di derivabilitá di $f$ in $x_0$.

(ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non derivabile in $x_0 = 2$.

(iii) Calcolare la derivata di $f(x) = e^{|x|}$.

### Risposta

(i)

(ii) $f(x) = |x-2|$

(iii) Per $x \neq 0$, $f'(x) = e^{|x|} \cdot \frac{x}{|x|}$. Per $x=0$, $\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{|h|}-1}{h} = 1$
$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{|h|}-1}{h} = -1$, quindi $f$ non è derivabile

## Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di dominio $y$-semplice

(ii) Enunciare il teorema di Fubini-Tonelli.

### Risoluzione

(i)

(ii)

## Esercizio 1

[3 punti]

Se entrambi le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hanno un punto di massimo assoluto in $x = 0$, allora

[a] $f + g$ é derivabile in 0 e $(f+g)'(0) = 0$

[b] $|fg|$ é limitata in $\mathbb{R}$

[X] $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M - g(x)$;

[d] $f(x)g(x) \leq f(0)g(0)\ \forall x \in \mathbb{R}$

**Risoluzione** (giustificare la risposta)

Poiché $f, g$ hanno un massimo assoluto in $x=0$, $\exists M_1, M_2$ t.c. $f(x) \leq M_1$, $g(x) \leq M_2$ $\forall x \in \mathbb{R}$, da cui

$$f(x) + g(x) \leq M_1 + M_2 = M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

## Esercizio 2

[3 punti]

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $-3z + 5z\bar{z} = 2$. Allora

[X] $Im(z) = 0$

[b] $Re(z) = 0$

[c] $|z| = 1$

[d] $Re(z) - Im(z) = 0$.

**Risoluzione** (giustificare la risposta)

$z = a + ib$, allora $-3a + 5(a^2+b^2) - 3bi = 2$, quindi necessariamente $Im(z) = b = 0$

## Esercizio 3

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$

[a] non converge

[b] converge assolutamente

[c] converge semplicemente

[X] Nessuna delle precedenti

**Risoluzione** (giustificare la risposta)

[a] No, per $a_n = n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

[b] No, per $a_n = n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, ma non converge assolut.

[c] No, per $a_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ non converge

## Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{y(t)^4} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

### Risoluzione

Eq. a variabili separabili con $g(y) = 1/y^5$, $h(t) = \sqrt{t}$; poiché $g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $h \in C^0((0,+\infty))$, $\exists!$ sol. in un intorno di $t_0 = 1$ per ogni $\alpha \neq 0$ ($\alpha = 0$ non è accettabile)

- Sol stazionarie: $g(\alpha) = 0 \iff 1/\alpha^4 = 0$ (impossibile)
- Separazione variabili: $\int_\alpha^{y(t)} r^4\,dr = \int_1^t \sqrt{r}\,dr \iff$

$\frac{y^5(t)}{5} - \frac{\alpha^5}{5} = \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{3} \iff y^5(t) = \alpha^5 + \frac{10}{3}(t^{3/2} - 1)$

$\iff y(t) = \sqrt[5]{\alpha^5 + \frac{10}{3}(t^{3/2} - 1)}$

## Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

### Risoluzione

$e^{x^2} - e^{x^3} = (1 + x^2 + o(x^2)) - (1 + x^3 + o(x^3)) = x^2 + o(x^2)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ ; $\sin(x) = x + o(x^2)$ ; $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

$e^x - \sin(x) - \cos(x) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

## Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -\ln(x) + \arctan(x-1)$$

## Risoluzione

Dominio : $(0, +\infty)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(x-2)(x-1)}{x(x^2-2x+2)}$

$f'(x) = 0 \iff x = 1, \ x = 2$ (punti critici)

$f'(x) > 0 \iff x \in (1, 2)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (0,1) \cup (2, +\infty$

$x = 1$ : min locale $(f(1) = 0)$

$x = 2$ : max locale $(f(2) > 0)$