D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 4.7.2023: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(ii) Descrivere il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ al variare di $q \in \mathbb{R}$

Risposta

(i)

(ii)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con il resto di Peano.

(ii) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 in $x_0 = 0$ di $f(x) = 3 + x \cdot (2 + \ln(1+x))$

Risoluzione

(i)

(ii)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = 3 + x(2+\ln(1+x)) = \underbrace{3 + 2x + x^2 - \frac{x^3}{2}}_{T_3(x)} + o(x^3)$$

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $a_n = \sin(n\pi) \cdot (1 + \frac{1}{n})$ é

- [x] a infinitesima
- [ ] b oscillante
- [ ] c asintotica a $n\pi$
- [ ] d divergente

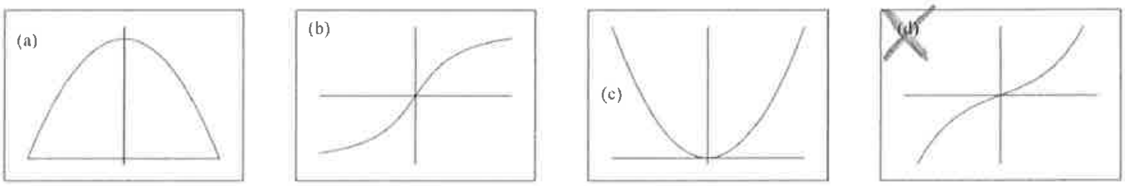
Risoluzione (giustificare la risposta)

$a_n = \sin(n\pi)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale $f'(x) = e^{x^2}$. Allora parte del grafico di f é



Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = e^{x^2} > 0 \Longrightarrow f$ crescente

$f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x = \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \Longrightarrow \text{convessa} \\ < 0 & \text{se } x < 0 \Longrightarrow \text{concava} \end{cases}$

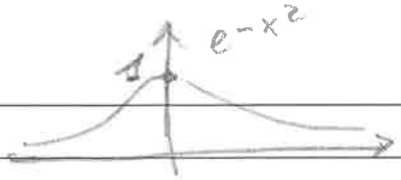
Esercizio 3

[3 punti]

L'insieme $\{e^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\}$

- [ ] a ha massimo e minimo
- [ ] b non é limitato
- [x] c ha massimo ma non minimo
- [ ] d coincide con $\mathbb{R}$

Risoluzione (giustificare la risposta)



$\{e^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\} = (0,1]$

$\max f = 1$

$\inf f = 0$, ma il minimo non esiste

Esercizio 4

[4 punti]

Trovale l'integrale generale dell'equazione $y'' + y = e^x$

Risoluzione

- Eq omogenea: $y'' + y = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$

  $y_0(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

- Sol. particolare: $f(x) = e^x \implies \bar{y}(x) = Ae^x$

  $\bar{y}'(x) = Ae^x, \ \bar{y}''(x) = Ae^x \implies 2Ae^x = e^x \implies A = \frac{1}{2}$

- Int. generale

  $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \frac{1}{2} e^x$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare la convergenza della successione $\{n - \sqrt{n^2 + n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Risoluzione

$$\lim_{n \to \infty} \left(n - \sqrt{n^2+n}\right) \frac{n + \sqrt{n^2+n}}{n + \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} - n}{n + \sqrt{n^2+n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x + 3}$ e disegnarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$

$f(x) = 0 \iff 3x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$

$x = -1$

$f(x) > 0 \iff x \in (-3, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$

$f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (-1, -\frac{1}{3})$

		-3	-1	$-\frac{1}{3}$
$3x^2+4x+1>0$	$+\ +$	$+\ +\ +\ +$	$-\ -\ -$	$+\ +\ +$
$x+3>0$	$-\ -$	$+\ +\ +$	$+\ +\ +$	$+\ +\ +$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$

Derivata:

$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 18x + 11}{(x+3)^2}$

$f'(x) = 0 \iff x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{\dfrac{26}{3}}$