Appello del 3.2.2020: Compito B

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 6x^2 + 2$ nel punto $x_0 = 1$

Risposta

(i)

(ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, quindi

$y = 8 + 12(x-1) = 12x - 4$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la formula del polinomio di Taylor $T_n(x)$ di ordine n per lo sviluppo di una funzione f nel punto x_0

(ii) Enunciare il Teorema della formula di Taylor con il resto di Peano

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $a_n = \frac{n!}{e^n}$. Allora

- [x] a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é convergente;
- [ ] b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é convergente;
- [ ] c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente;
- [ ] d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é assolutamente convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$, applicando il criterio del rapporto

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \Rightarrow$ Converge

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in x_0. Allora

- [ ] a) f é derivabile in x_0 ;
- [ ] b) $|f|$ non é continua in x_0 ;
- [x] c) $\sqrt{|f|}$ é continua in x_0;
- [ ] d) $\frac{1}{f}$ é continua in x_0 .

Risoluzione (giustificare la risposta)

La funzione $\sqrt{|f|}$ è definita in $\mathbb{R}$ e continua poichè composizione di funzione continue

Esercizio 3

[3 punti]

La successione $\{(\frac{n}{n-1})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- [ ] a) tende a 1
- [ ] b) tende a e^{-1}
- [x] c) tende a e
- [ ] d) é divergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-1}} = e$

B

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{4}{\sqrt[3]{3x+6}}dx$$

Risoluzione

$$\frac{1}{3}\int \frac{3}{(3x+6)^{1/3}}\,dx \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^{1/3}}\,dt = \frac{\cancel{3}\,t^{2/3}}{2\,\cancel{3}} = \frac{t^{2/3}}{2} + c$$

$$\begin{cases} t = 3x+6 \\ dt = 3dx \end{cases}$$

$$= \frac{(3x+6)^{2/3}}{2} + c$$

quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{3x+6}}\,dx = \left[\frac{(3x+6)^{2/3}}{2}\right]_0^1 = \frac{9^{2/3}}{2} - \frac{6^{2/3}}{2}$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x) - \frac{x^3}{[illegible]}}{e^{x^5} - 1 + x^6}$$

Risoluzione

$$e^{x^5} - 1 + x^6 = x^5 + o(x^5) + x^6 \sim x^5$$

$$x^2 \sin(x) = x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + o(x^5)$$

$$x^2 \sin(x) - x^3 = -\frac{x^5}{3!} + o(x^5) \sim -\frac{x^5}{5!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(x) - x^3}{e^{x^5} - 1 + x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^5}{3!}}{x^5} = -\frac{1}{6}$$

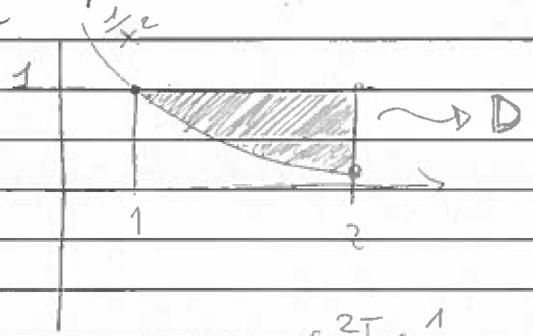
Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2],\ 1 \leq x^2 y \leq x^2\}$ e calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$.

Risoluzione

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2],\ \frac{1}{x^2} \leq y \leq 1 \right\}$$



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_{1/x^2}^{1} xy\,dy \right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{1/x^2}^{1} dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x^3} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 + \left[\frac{1}{4x^2} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$