Appello del 3.2.2020: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 + 1$ nel punto $x_0 = 1$

Risposta

(i)

(ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = 2 + 3(x-1) = 3x - 1$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la formula del polinomio di Taylor $T_n(x)$ di ordine n per lo sviluppo di una funzione f nel punto x_0

(ii) Enunciare il Teorema della formula di Taylor con il resto di Lagrange

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $a_n = \frac{2^n}{n}$. Allora

- [x] a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é convergente;
- b $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é convergente;
- c $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente;
- d $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é assolutamente convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\sum_n \frac{1}{a_n} = \sum_n \frac{n}{2^n}$, applicando il criterio del rapporto

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$, quindi la serie converge

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0. Allora

- a $|f|$ é derivabile in x_0 ;
- b $|f|$ non é derivabile in x_0 ;
- [x] c $\sqrt{|f|}$ é continua in x_0;
- d $\frac{1}{f}$ é derivabile in x_0 .

Risoluzione (giustificare la risposta)

f è continua in x_0, poiché la derivabilità implica la continuità, quindi $\sqrt{|f|}$ è composizione di funzioni continue.

Esercizio 3

[3 punti]

La successione $\{(\frac{n}{n+1})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- a tende a 1
- [x] b tende a e^{-1}
- c tende a e
- d é divergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$

A

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+6}}dx$$

Risoluzione

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+6}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x+6)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x+6} + C$$

$t = 2x+6$

$dt = 2\,dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+6}}\,dx = \left[\sqrt{2x+6}\right]_0^1 = \sqrt{8} - \sqrt{6}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^2) - x^3}{e^{x^7} - 1 + x^8}$$

Risoluzione

$$e^{x^7} - 1 + x^8 = x^7 + o(x^7) + x^8 \sim x^7$$

$$x\sin(x^2) = x\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)\right) = x^3 - \frac{x^7}{3!} + o(x^7)$$

$$x\sin(x^2) - x^3 = -\frac{x^7}{3!} + o(x^7) \sim -\frac{x^7}{3!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^2) - x^3}{e^{x^7} - 1 + x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^7}{3!}}{x^7} = -\frac{1}{6}$$

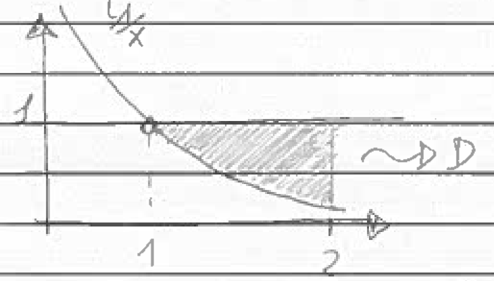
Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2],\ 1 \leq xy \leq x\}$ e calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$.

Risoluzione

$$D = \left\{ (x,y) :\ x \in [1,2] \quad \frac{1}{x} \leq y \leq 1 \right\}$$



$$\iint_D xy \, dx\,dy = \int_1^2 \int_{1/x}^{1} xy \, dy \, dx = \int_1^2 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{1/x}^{1} dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\ln|x| \right]_1^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$$