D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 31.1.2022: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1 **[3+2 punti]**

(i) Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dare la definizione di derivata parziale rispetto la variabile y in (x_0, y_0).

(ii) Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = e^{x^2y+y}$ nel punto $(0, 1)$.

Risposta

(i)

(ii) $f_x(x,y) = e^{x^2y+y} \cdot 2xy \qquad f_y(x,y) = e^{x^2y+y} \cdot (x^2+1)$

$Df(x,y) = (0, e)$

Domanda 2 **[3+2 punti]**

(i) Enunciare il *Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Peano.*

(ii) Calcolare lo sviluppo di Taylor del 5° ordine in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = x^2 \sin(x) - x^3$

Risoluzione

(i)

(ii) $x^2 \sin(x) = x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + o(x^5)$

$T_5(x) = -\frac{x^5}{3!}$

Esercizio 1 [3 punti]

Se $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora

[a] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge;

[b] $\sum_{n=0}^{\infty}(1/a_n) = 0$;

[X] $\sum_{n=0}^{\infty}(1/a_n) = 3/2$;

[d] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge, ma é limitata

Risoluzione (giustificare la risposta)

$a_1 = 3,\ a_2 = 3^2,\ a_3 = 3^3,\ \dots,\ a_n = 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ (serie geometrica)

Esercizio 2 [3 punti]

Risoluzione (giustificare la risposta)

Sia f continua in $x = 0$. Allora

[a] $\exists\delta > 0$ tale che f é monotona in $(-\delta, \delta)$;

[b] $\lim_{n\to\infty}(f(5/(2n+7)) - f(-1/(3n^2+1))) = 0$;

[c] f é derivabile in $x = 0$;

[d] $\lim_{n\to\infty} n^2 f(6/5^n) = -\infty$.

Per la continuità, poichè $\frac{5}{2n+7} \to 0$, $\frac{-1}{3n^2+1} \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{5}{2n+7}\right) - f\left(\frac{-1}{3n^2+1}\right) = f(0) - f(0) = 0$

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(1) = 2$, $f'(x) = \cos(x^4)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

[X] $f(x) = 2 + \int_1^x \cos(t^4)dt$;

[b] $f(x) = 1 + \int_2^x \cos(t^4)dt$;

[c] $f(x) = 2\int_1^x \cos(t^4)dt$;

[d] $f(x) = \int_2^x \cos(t^4)dt$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teo fondamentale del calcolo integrale si ha

$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)\,dt = 2 + \int_1^x \cos(t^4)\,dt$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - y(t) = (t+1)e^t$$

Risoluzione

1) eq. omogenea: $y''(t) - y(t) = 0$

Pol. caratteristico $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1 \iff y_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$

2) Sol. particolare: $f(t) = (t+1)e^t \; (\gamma = 1, \delta = 0, m = 1) \overset{k=1}{\implies} \bar{y}(t) = t(a_0 + a_1 t)e^t$

$\bar{y}'(t) = e^t(a_1 t^2 + (2a_1 + a_0)t + a_0)$; $\bar{y}''(t) = e^t(a_1 t^2 + (4a_1 + a_0)t + 2(a_1 + a_0))$

Sostituendo nell'EDO: $4a_1 t + 2(a_1 + a_0) = t + 1 \implies \begin{cases} a_1 = +\frac{1}{4} \\ a_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$

3) $y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{4} t^2 e^t + \frac{1}{4} t e^t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx$$

Risoluzione

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(\sin(x)) + C$$

$\begin{cases} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)dx \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx = \Big[4\arctan(\sin(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\arctan(1) = \pi$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione

$$e^{\frac{4-x}{x^2}}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ asintoto orizzontale

- $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = +\infty$ asintoto verticale

Derivata: $f'(x) = e^{\frac{4-x}{x^2}} \cdot \frac{-x^2-(4-x)\cdot 2x}{x^4} = e^{\frac{4-x}{x^2}}(x^2-8x) \quad \forall x \neq 0$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 8x = 0 \iff x = 8$

$f(8) = e^{-\frac{1}{16}} < 1$

$f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > 8$

$f'(x) < 0$ per $x \in (0, 8)$