Appello del 31.1.2022: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dare la definizione di derivata parziale rispetto la variabile x in (x_0, y_0).

(ii) Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = e^{xy^2+y}$ nel punto $(0,1)$.

Risposta

(i)

(ii) $f_x(x,y) = e^{xy^2+y} \cdot y^2$, $f_x(x,y) = e^{xy^2+y} \cdot (2xy+1)$

$Df(x,y) = \left(e^{xy^2+y} \cdot y^2, e^{xy^2+y}(2xy+1)\right)\Big|_{(0,1)} = (e, e)$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Lagrange.*

(ii) Calcolare lo sviluppo di Taylor del 7° ordine in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = x\sin(x^2) - x^3$

Risoluzione

(i)

(ii) $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \theta(x^6)$

$x\sin(x^2) - x^3 = x^3 - \frac{x^7}{3!} + \theta(x^7) - x^3$, da cui

$T_7(x) = -\frac{x^7}{3!}$

Esercizio 1

[3 punti]

Se $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora

[a] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge;

[b] $\sum_{n=0}^{\infty}(1/a_n) = +\infty$;

[X] $\sum_{n=0}^{\infty}(1/a_n) = 2$;

[d] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge, ma é limitata

Risoluzione (giustificare la risposta)

$a_1 = 2,\ a_2 = 4;\ a_3 = 8 \ldots$ quindi $a_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{(Serie geometrica)}$$

Esercizio 2

[3 punti]

Risoluzione (giustificare la risposta)

Sia f continua in $x = 0$. Allora

[a] $\exists\delta > 0$ tale che f é monotona in $(-\delta, \delta)$;

[X] $\lim_{n\to\infty}(f(5/(2n+1)) - f(-1/(3n+4))) = 0$;

[c] f é derivabile in $x = 0$;

[d] $\lim_{n\to\infty} n^2 f(2/5n) = +\infty$.

Per la continuità, poichè $\frac{5}{2n+1} \to 0$, $\frac{-1}{3n+4} \to 0$ per $n \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{5}{2n+1}\right) - f\left(-\frac{1}{3n+4}\right) = f(0) - f(0) = 0$$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(1) = 2$, $f'(x) = \sin(x^4)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

[X] $f(x) = 2 + \int_1^x \sin(t^4)dt$;

[b] $f(x) = 1 + \int_2^x \sin(t^4)dt$;

[c] $f(x) = 2\int_1^x \sin(t^4)dt$;

[d] $f(x) = \int_2^x \sin(t^4)dt$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal Teo. fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)\,dt = 2 + \int_1^x \sin(t^4)\,dt$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - y'(t) = te^t$$

Risoluzione

1) Eq. omogenea: $y''(t) - y'(t) = 0$

Pol. caratteristico: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1 \Rightarrow y_0(t) = C_1 + C_2 e^t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2) Sol. particolare

$f(t) = te^t$ $(\gamma = 1, \delta = 0, m = 1)$ $\overset{k=1}{\Rightarrow} \bar{y}(t) = t(a_1 t + a_0)e^t = (a_1 t^2 + a_0 t)e^t$

$\bar{y}'(t) = e^t(a_1 t^2 + (2a_1 + a_0)t + a_0)$

$y''(t) = e^t(a_1 t^2 + (4a_1 + a_0)t + (2a_1 + 2a_0))$

Sostituendo ottengo $a_1 t^2 + (4a_1 + a_0)t + 2a_1 + 2a_0 - a_1 t^2 - a_0 t = t \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2} \\ 2a_1 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = \text{[illegible]} \end{cases}$

3) Integrale generale: $y(t) = C_1 + C_2 e^t + \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right)e^t$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

Risoluzione

$$\int \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = -\int \frac{1}{1 + t^2} dt = -\arctan(t) + c = -\arctan(\cos(x)) + c$$

$$\begin{cases} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x)dx \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = -4\left[\arctan(\cos(x))\right]_0^{\pi/2} = +4\arctan(1) = +4\frac{\pi}{4} = +\pi$$

Esercizio 6 [4 punti]

$\boxed{e^{\frac{x-2}{x^2}}}$

Studiare la funzione $\cancel{e^{\frac{x-2}{2x^2}}}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

- $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- segno: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- limiti: $\begin{cases} \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 & \text{(asintoti orizzontali in } \pm\infty) \\ \lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 0 \end{cases}$
- $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{x-2}{x^2}}}{x^4} \cdot \left(-x^2 + 4x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0,\ x = 4$

$\begin{cases} f'(x) > 0 \iff x \in (0,4) \\ f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = 0$

$f(4) = e^{2/16} > 1$