D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 3.7.2024: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Dare la definizione di derivata di f in x_0.

(ii) Calcolare la derivata della funzione $e^{\cos(x^2)}$ in $x_0 = \sqrt{\pi/2}$.

Risposta

(i)

(ii) $f'(x) = e^{\cos(x^2)} \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x \Rightarrow f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli Zeri.

(ii) Mostrare che la funzione $f(x) = x^4 - x^3 + 3x - 2$ ha un zero positivo.

Risoluzione

(i)

(ii) f continua in $\mathbb{R}$,

$f(0) = -2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Esercizio 1

[3 punti]

Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita dalla seguente relazione ricorsiva:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \quad \text{per } n \geq 1$$

Qual è il limite della successione $\{a_n\}$ quando n tende all'infinito?

- ~~[a]~~ 2
- [b] 1
- [c] 3
- [d] $\frac{4}{3}$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \Rightarrow L = \frac{L}{2} + 1 \Rightarrow L = 2$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Allora f

- [a] è continua in $x = 1$ perché $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$
- [b] è continua in $x = 1$ perché $f(1) = 3$.
- [c] non è continua in $x = 1$ perché $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.
- ~~[d]~~ non è continua in $x = 1$ perché $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

Esercizio 3

[3 punti]

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ é

- [a] divergente;
- ~~[b]~~ convergente;
- [c] oscillante;
- [d] a segni alterni.

Risoluzione

Serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$ e $$\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$$ per $n \to \infty$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare $\sqrt[3]{-1}$ nel campo complesso.

$$-1 = e^{0}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) \qquad |-1| = 1 \qquad \arg(-1) = \pi$$

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \ln(1 + x^2) - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{\sin(x^4)}$$

Risoluzione

$\sin(x^4) \sim x^4$ per $x \to 0$

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$1 + \ln(1+x^2) - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2 = \cancel{1} + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{4!} - \cancel{\frac{3}{2}x^2} + o(x^4) = -\frac{13}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \ln(1+x^2) - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{\sin(x^4)} = -\frac{13}{24}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare e disegnare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = 1 - e^{x^3+x^2-x}$$

Risoluzione

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
- non ci sono simmetrie
- $f(x) = 0 \iff x^3 + x^2 - x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

segno

$f(x) > 0 \iff x^3 + x^2 - x < 0 \iff x(x^2 + x - 1) < 0 \iff$

$x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $x \in \left(0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
x						
x^2+x-1						
	$0<$		>0		<0	>0

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ (asintoto orizzontale)

- $f'(x) = -e^{x^3+x^2-x} \cdot (3x^2 + 2x - 1)$

$f'(x) = 0 \iff (3x^2 + 2x - 1) = 0 \iff x = -1$ e $x = \dfrac{1}{3}$

$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$