Appello del 1.7.2022: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2punti]

Data una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

(i) dare la definizione di divergenza a $+\infty$;

(ii) fare un esempio di serie divergente.

Risposta

(i)

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

(ii) Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ nel punto $x_0 = 1$

Risoluzione

(i)

(ii)

$F'(x) = e^{-x^2}$

$F'(1) = e^{-1}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona, allora

- [a] f é limitata
- [b] f é continua
- [~~c~~] f ammette minimo in [0,2];
- [d] f esiste finito $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per definizione di monotonia, se
1) f crescente, $\min_{[0,2]} f = f(0)$
2) f decrescente, $\min_{[0,2]} f = f(2)$

Esercizio 2

[3 punti]

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ é

- [~~a~~] convergente
- [b] divergente
- [c] oscillante
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Applicando il criterio del rapporto

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$, quindi la serie converge

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} - 2 & x \geq 0 \\ x \cdot \cos(1/x) + \alpha & x < 0 \end{cases}$$

é continua in $x = 0$

- [a] se $\alpha = 1$,
- [~~b~~] se $\alpha = -1$,
- [c] se $\alpha = 0$,
- [d] per nessun α.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \iff$

$\lim_{x \to 0^+} e^{\sqrt{x}} - 2 = \lim_{x \to 0^-} \left(x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha\right) \iff -1 = \alpha$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx$$

Risoluzione

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^3(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\cos(x)\, dx$$

$$\underset{\substack{t=\sin(x)\\ dt=\cos(x)dx}}{=} \int_0^1 t^2(1-t^2)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\cdot(1+\sin(2x))-x}{x^2}$$

Risoluzione

$$\ln(1+x)(1+\sin(2x))-x = \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+2x+o(x)\right)-x$$

$$= x+2x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x = \frac{3}{2}x^2+o(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)(1+\sin(2x))-x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x-4}{e^x}$$

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

- Segno: $f(x)=0 \iff x=4$

   $f(x)>0 \iff x>4$, $f(x)<0 \iff x<4$

- Limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Derivata

$f'(x) = \frac{e^x - (x-4)e^x}{(e^x)^2} = 0 \iff (5-x) = 0 \iff x=5$

$f'(x)>0 \iff x<5$

$f'(x)<0 \iff x>5$

$\implies x=5$ punto di ~~min~~ locale

$(f(5) = e^{-5})$