D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 6.9.2022: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2punti]

(i) Dare la definizione di derivata per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non derivabile nel punto $x_0 = 3$.

Risposta

(i)

(ii)

$f(x) = |x-3|$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $f = o(g)$ per $x \to x_0$.

(ii) Fare un esempio di una funzione f tale che $f = o(\ln(1 + x^2))$ per $x \to 0$

Risoluzione

(i)

(ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$x^3 = o(\ln(1+x^2))$ per $x \to 0$

Esercizio 1 **[3 punti]**

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é limitata inferiormente in (a, b), allora

☐ a f é limitata

☐ b f é continua

☐ c esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$;

☒ d esiste $\inf\{f(x) : x \in (a, b)\}$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

f limitata inferiormente $\iff \exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m$ $\forall\, x \in (a, b) \implies m$ è un minorante di $\{f(x) : x \in (a, b)\}$ $\implies \exists \inf\{f(x) : x \in (a, b)\}$

Esercizio 2 **[3 punti]**

L'estremo superiore dell'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} : e^x < \frac{1}{2}\}$ é

☐ a ε (con ε molto piccolo)

☐ b non esiste

☐ c 0

☒ d $-\ln(2)$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$e^x < \frac{1}{2} \iff x < \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \implies$

$D = (-\infty, -\ln(2))$

Esercizio 3 **[3 punti]**

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0. \end{cases}$$

Allora

☐ a f é continua in 0

☐ b non esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$,

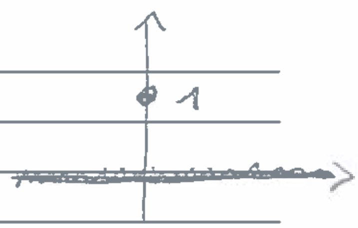
☒ c $x_0 = 0$ é un punto di massimo per f,

☐ d f non é integrabile in $[-1, 1]$.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$f(0) = 1 \geq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \implies$

$x_0 = 0$ punto di massimo assoluto



Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$$

Risoluzione

Serie a segni alterni con $a_n = \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$.

Convergenza Assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$$

Poiché $\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ e

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, allora la serie converge

assolutamente e quindi semplicemente

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(7x-6)\cos(3x)\,dx$$

Risoluzione

Per parti $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(7x-6)\cos(3x)\,dx = (7x-6)\frac{\sin(3x)}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$- \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 7\frac{\sin(3x)}{3}\,dx = (7x-6)\frac{\sin(3x)}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$+\frac{7}{9}\cos(3x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{7\pi}{2}-6\right)\frac{(-1)}{3} - \left(-\frac{7\pi}{2}-6\right)\frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

e disegnarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

– Funzione

• Dominio: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Segno: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Limiti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = e$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$ (asintoto orizz.)

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

– Derivata

$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$ per $x \neq 1$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0$

– Grafico