D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 7.1.2014: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza $a +\infty$ per una successione numerica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Descrivere il comportamento della successione $\{n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 = n_0(M)$$

t.c. $\forall n > n_0, \ a_n > M$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la formula per il polinomio di Taylor $T_n(x)$ di ordine n in un punto x_0

(ii) Enunciare il Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Lagrange.

Risposta

(i)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(ii)

Vedi appunti

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni, di cui la prima é infinitesima e la seconda non converge. Allora la successione $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- [a] non converge, ma é limitata
- [b] non converge
- [c] converge
- [d] Nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) falso per $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$

b) falso per $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$

c) falso per $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n \cdot n$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}\,\sin(x)$ é

- [a] dispari
- [b] limitata
- [X] [c] derivabile in $\mathbb{R}$
- [d] non derivabile in 0

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dobbiamo solo dimostrare che f é deriv. in 0

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\,\sin(h) - 0}{h} = 0$$

Esercizio 3

[3 punti]

Il numero complesso $\dfrac{i-1}{i+1}$

- [a] ha parte reale strettanente negativa
- [b] ha parte reale strettanente positiva
- [X] [c] é puramente immaginario
- [d] é reale

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\frac{i-1}{i+1} = \frac{i-1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = -\left(\frac{i^2+1^2-2i}{1^2+1^2}\right) = +\frac{2i}{2} = i$$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^{\beta} y(t)^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Risoluzione

Equazione a variabili separabili

$$\int_2^{y(t)} \frac{dr}{r^2} = \int_1^t r^{\beta}\, dr$$

1) $\beta = -1$ $\quad -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{2} = \ln|t| - \cancel{\ln|1|} \iff$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln|t|}$$

2) $\beta \neq -1$, $\quad -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{2} = \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+1} \iff$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1}}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \ln(1+x^2) - x^4}{\cos(x^3) - 1}$$

Risoluzione

$$\cos(x^3) - 1 \sim -\frac{x^6}{2}$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$x^2 \ln(1+x^2) - x^4 = \cancel{x^4} - \frac{x^6}{2} + o(x^6) - \cancel{x^4} \sim -\frac{x^6}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \ln(1+x^2) - x^4}{\cos(x^3) - 1} = 1$$

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{4x+6}}\,dx$$

Risoluzione

Per sostituzione

$t = \sqrt[3]{4x+6}$ $\qquad$ $x = \frac{t^3-6}{4}$

$dx = \frac{3}{4} t^2 dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{4x+6}}\,dx = \int \frac{t^3-6}{4\cancel{t}} \, \frac{3}{4} t^{\cancel{2}} dt =$$

$$= \frac{3}{16} \int (t^4 - 6t)\,dt = \frac{3}{16}\left(\frac{t^5}{5} - \cancel{6}^{\,3}\frac{t^2}{\cancel{2}}\right) + c =$$

$$= \frac{3}{16}\left[\frac{(4x+6)^{5/3}}{5} - 3(4x+6)\right] + c$$

Si poteva risolvere anche per parti