Appello del 10.1.2023: Compito B

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+2+1 punti]

(i) Dare la definizione di minorante di $A \subset \mathbb{R}$;

(ii) dare la definizione di estremo inferiore di $A \subset \mathbb{R}$;

(iii) Trovare l'estremo inferiore di $A = \{1 + e^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Risposta

(i)

(ii)

$\inf A = 1$, infatti $\{1+e^{-n}\}$ è una succ. decrescente e $\lim_{n\to\infty} 1+e^{-n} = 1$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.

(ii) Fare un esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente

Risoluzione

(i)

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ è convergente, ma

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Esercizio 1 [3 punti]

La funzione $(\ln(1+x^3))^2$ é, per $x \to 0^+$, asintotica a

- [a] x^2
- [b] x^4
- [c] x^8
- [d] x^6 ☒

Risoluzione (giustificare la risposta)

$(\ln(1+x^3))^2 = (x^3 + o(x^3))^2 = x^6 + o(x^6) \sim x^6$

Esercizio 2 [3 punti]

Il numero complesso $(i+5)/(i-5)$

- [a] ha parte reale strettamente negativa ☑
- [b] ha parte reale strettamente positiva
- [c] é puramente immaginario
- [d] é reale

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\frac{i+5}{i-5} = \frac{i+5}{-5-i} \frac{(-5-i)}{-5+i} = \frac{-5i - i^2 - 25 - 5i}{5^2+1^2} = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13} i$

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e strettamente decrescente tale che $f(0) = 1$, $f(1) = e^{-1}$. Allora

- [a] $f(x) = e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- [b] f é continua in $\frac{1}{2}$
- [c] f é integrabile in $[0, 1]$ ☒
- [d] f é integrabile in $(-\infty, 0]$

Risoluzione (giustificare la risposta)

f decrescente e limitata in $[0,1] \Rightarrow$ f integrabile in $[0,1]$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x^2)} \left(\frac{x}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} \right)$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x^2)} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \cos(x) \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$$

$$\sin(x^2) \sim x^2$$

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = x^2 - 2\frac{x^4}{3!} + o(x^4)$$

$$x^2 - \sin^2(x) = \frac{1}{3} x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{3} x^4$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})dt$$

Risoluzione

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})\, dt = \int_0^{\pi} 2x \cos(x)\, dx = (*)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \iff t = x^2 \\ t = 0 \implies x = 0 \\ t = \pi^2 \implies x = \pi \end{cases}$$

$$(*) = \Big[2x \sin(x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin(x)\, dx =$$

$$= \Big[2x\sin(x) + 2\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -2 - 2 = -4$$

Esercizio 6 [4 punti]

Tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

(verificare se ammette asintoti obliqui in $\pm\infty$).

Risoluzione

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

segno: $f \geq 0 \iff x-3 > 0 \iff x > 3$

zeri: $f(x) = 0 \iff x = 0$

limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

Asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \; , \; \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 3x}{x-3} = 3$$

$\Rightarrow y = x + 3$ è asintoto obliquo in $\pm\infty$

- Derivata

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{x-3}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0, x = 6$

$f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$

$f'(x) \leq 0 \iff x \in [0, 3) \cup (3, 6]$