o del 10.1.2022: Compito B

Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

(ii) Descrivere il comportamento della successione $\{n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

(ii) Utilizzando il teorema al punto (i), calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^3}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\max A = \ell$;
- [b] ☒ A é limitato;
- [c] $\inf A = \ell$;
- [d] $\{\sin(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non é convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $\{a_n\}_n$ è convergente, allora $\{a_n\}_n$ è limitata, cioè $\exists$ m, M t.c. $m \le a_n \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora m e M sono rispettivamente un minorante e un maggiorante di A

Esercizio 2

[3 punti]

Risoluzione (giustificare la risposta)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x = 0$. Allora

- [a] $f'(0) = 0$;
- [b] $|f|$ non é derivabile in $x = 0$;
- [c] ☒ $|f|$ é continua in $x = 0$;
- [d] $|f|$ é derivabile in $x = 0$.

Poiché f è derivabile in $\mathbb{R}$, f è continua in $\mathbb{R}$ e quindi $|f|$ è continua in $\mathbb{R}$ essendo composizione di funzioni continue

Esercizio 3

[3 punti]

Il piano tangente al grafico di $f(x, y) = ye^x$ nell'origine é dato da

- [a] $z = x$;
- [b] ☒ $z = y$;
- [c] $z = xy$;
- [d] $z = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$z = f(0,0) + f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\cdot y = y$

$f_x(x,y) = ye^x \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = e^x \Rightarrow f_y(0,0) = 1$

$f(0,0) = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{\sin(x^3)}$$

Risoluzione

$\sin(x^3) \sim x^3$

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \theta(t^3) \Longrightarrow \sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \theta(x^3)\right)$

$- \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \theta(x^3)\right)^3 + \theta\left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + \theta(x^3)\right)^3\right) =$

$= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3!} + \theta(x^3) = x - \frac{1}{3}x^3 + \theta(x^3) \Longrightarrow$

$\sin(\sin(x)) - x = -\frac{1}{3}x^3 + \theta(x^3) \sim -\frac{1}{3}x^3$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{\sin(x^3)} = -\frac{1}{3}$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)y'(t) = (1 - y(t)^2) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

(suggerimento: riportare prima l'equazione in forma normale)

Risoluzione

In forma normale $y'(t) = \frac{1 - y^2(t)}{t^2+1} \Longrightarrow$ Variabili separabili

$\begin{cases} g(y) = 1 - y^2 \\ h(t) = \frac{1}{t^2+1} \end{cases}$

$\exists!\ y \in C^2((-\delta,\delta))$ sol. del pb. di Cauchy

1) Sol. stazionarie:

$g(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \alpha^2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \pm 1$

2) Per $\alpha \neq \pm 1$, $\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{1-r^2}\,dr = \int_0^t \frac{1}{1+r^2}\,dr \Longleftrightarrow$

$-\left[\frac{1}{2}\ln|r-1| - \frac{1}{2}\ln|r+1|\right]_\alpha^{y(t)} = \left[\arctan r\right]_0^t \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \arctan(t)$

$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right| \Longleftrightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{-2\arctan(t)}\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right|$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-9}}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ $\quad (x^2 - 9 = 0 \iff x = \pm 3)$
- Zeri: $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$; non ci sono zeri
- Segno: $f(x) > 0, \ \forall x \in D$
- Simmetrie: f pari
- limiti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

DERIVATA

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x^2-9}} \cdot \frac{2x}{(x^2-9)^2} \qquad \forall x \in D$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x) > 0 \iff -2x > 0 \iff x < 0, \ x \in D$

$f'(x) < 0 \iff -2x < 0 \iff x > 0, \ x \in D$

$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = 0$

$\lim_{x \to -3^+} f'(x) = 0$