A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 20.02.2024: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

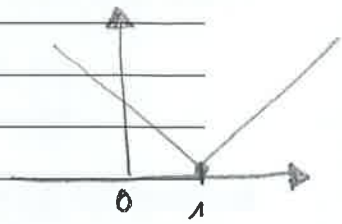
(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in un punto x_0.

ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non derivabile nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = |x-1|$ non è derivabile in $x_0 = 1$



Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema degli Zeri

(ii) Mostrare che la funzione $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x - 1$ ha uno zero in $[0, 1]$

Risoluzione

(i)

(ii) f è continua in $[0,1]$, inoltre $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, quindi $f(0) \cdot f(1) < 0$

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $a_n = 2^n - n^{500} + \sin(\frac{n\pi}{2})$ é

- [a] indeterminata;
- [b] convergente;
- [X] divergente a $+\infty$;
- [d] divergente a $-\infty$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n\Big(1 - \underbrace{\frac{n^{500}}{2^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{2^n}}_{\to 0}\Big) = +\infty$$

Esercizio 2

[3 punti]

L'integrale in senso improprio $\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$

- [a] é finito e non positivo;
- [b] non esiste;
- [X] é finito e non negativo ;
- [d] nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per $t \to \infty$, si ha che $1-\cos\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t^2}$ e $1-\cos\left(\frac{1}{t}\right) \geqslant 0$ per $t \in \mathbb{R}$, quindi $\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ è finito e non negativo

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^6 - 27i = 0$. Allora $|z|$ vale

- [a] 9
- [b] 27
- [c] 3
- [d] $\sqrt{3}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$z^6 = 27i \implies |z^6| = 27 \iff |z| = \sqrt[6]{27} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3}$

A

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_{e^{-1}}^{e^2} |\ln(x)|\, dx$$

Risoluzione

$$\int_{e^{-1}}^{e^2} |\ln(x)|\, dx = \int_{e^{-1}}^{1} (-\ln(x))\, dx + \int_{1}^{e^2} \ln(x) dx =$$

$$|\ln(x)| = \begin{cases} \ln(x) & x \geq 1 \\ -\ln(x) & x \in (0,1) \end{cases}$$

$$= -\left[x\ln(x) - x\right]_{e^{-1}}^{1} + \left[x\ln(x) - x\right]_{1}^{e^2} = \dots\dots$$

<u>OSS:</u>

$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln(x) - x + C$$

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{y(t)^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

Equazione a variabili separabili con $h(t) = \sqrt{t}$, $g(y) = \frac{1}{y^2}$.

- Sol. stazionarie: $g(1) = 1$, quindi a $y(1) = 1$ non corrisponde una sol. stazionaria

- Separazione variabili $\int_1^{y(t)} r^2 dr = \int_1^t \sqrt{r}\, dr \iff \frac{y^3(t)}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2t^{3/2}}{3} - \frac{2}{3} \iff y^3(t) = 2t^{3/2} - 1 \iff y(t) = \sqrt[3]{2t^{3/2} - 1}$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie
- $f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$
  $f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
  $f(x) < 0 \iff x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $f(0) = -3$
- $f'(x) = \frac{2x\cancel{e^x} - (x^2-3)\cancel{e^x}}{e^{\cancel{2x}}} = \frac{-x^2+2x+3}{e^x}$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = -1$ e $x = 3$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 3)$; $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$