D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.1.2022: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

(ii) Descrivere il comportamento della successione $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & -1<q<1 \\ \nexists & q\leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

(ii) Utilizzando il teorema al punto (i), calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\sup A = \ell$;
- [b] $\min A = \ell$;
- [X] A é limitato;
- [d] $\{\sin(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non é convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\{a_n\}_n$ è convergente, allora è limitata, cioè $\exists\, m, M$ t.c. $m \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora m e M sono rispettivamente un minorante e un maggiorante di A

Esercizio 2

[3 punti]

Risoluzione (giustificare la risposta)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x = 0$. Allora

- [a] $|f|$ é derivabile in $x = 0$;
- [b] $|f|$ non é derivabile in $x = 0$;
- [X] $|f|$ é continua in $x = 0$;
- [d] $f'(0) = 0$.

Poichè f è derivabile in $\mathbb{R}$, è continua in $\mathbb{R}$ e quindi $|f|$ è continua in $\mathbb{R}$, essendo composizione di funzioni continue

Esercizio 3

[3 punti]

Il piano tangente al grafico di $f(x, y) = xe^y$ nell'origine é dato da

- [X] $z = x$;
- [b] $z = y$;
- [c] $z = xy$;
- [d] $z = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$z = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = x$

$f_x(x,y) = e^y \quad , \quad f_y(x,y) = xe^y$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{e^{x^3} - 1}$$

Risoluzione

$e^{x^3} - 1 \sim x^3$

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \Rightarrow \sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) +$

$- \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3\right) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) =$

$= x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$

$\sin(\sin(x)) - x = -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{e^{x^3} - 1} = -\frac{1}{3}$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)y'(t) = (y(t)^2 - 2y(t) + 1) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

(suggerimento: riportare prima l'equazione in forma normale)

Risoluzione

$y'(x) = \frac{(y^2(t) - 2y(t) + 1)}{(t^2+1)} \longrightarrow$ variabili separabili $\quad g(y) = y^2 - 2y + 1$, $\quad h(t) = \frac{1}{t^2+1}$

$\exists!\ y \in C^2(-\delta, \delta)$ sol. del pb. di Cauchy

1) Sol. stazionarie: $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

2) Per $\alpha \neq 1$, $\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{(r-1)^2}\,dr = \int_0^t \frac{1}{1+r^2}\,dr \Leftrightarrow$

$\left[-\frac{1}{(r-1)}\right]_\alpha^{y(t)} = \left[\arctan(r)\right]_0^\alpha \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)-1} = \arctan(t) - \frac{1}{(\alpha-1)}$

$\Leftrightarrow y(t) = 1 + \frac{\alpha - 1}{1 - (\alpha-1)\arctan(t)}$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{4-x^2}}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ $\quad (4 - x^2 = 0 \iff x = \pm 2)$
- Zeri: $e^{\frac{1}{4-x^2}} > 0$, non ci sono zeri
- Segno: $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$
- Simmetrie: f pari
- Limiti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0$

Derivata:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{4-x^2}} \cdot \frac{2x}{(4-x^2)^2}, \quad x \in D$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x) > 0$ se $2x > 0 \iff x > 0$, $x \in D$

$f'(x) < 0$ se $2x < 0 \iff x < 0$, $x \in D$

$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = 0$, $\lim_{x \to -2^-} f'(x) = 0$