CAPITOLO 8

Le equazioni differenziali ordinarie

Prima di introdurre la terminologia di base delle equazioni differenziali, accenniamo ad alcuni esempi che portano in maniera naturale allo studio di questo tipo di equazioni.

Esempio (Primitive di una funzione). Ricordiamo il problema di base della teoria dell'integrazione in una variabile

Problema. Data f = f(t) funzione nota, trovare y = y(t) funzione incognita tale che y'(t) = f(t).

Sappiamo dal Teorema Fondamentale del Calcolo integrale che la soluzione del problema precedente é data dall'integrale indefinito e che tutte le primitive di f differiscono per una costante. Riformuliamo il problema precedente nel seguente modo:
Data $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $t_0 \in I$, trovare una funziona $y : I \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{0.5}$$

Allora in questo caso l'unica soluzione del problema é data da

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.$$

Quindi fissando il valore della soluzione in un punto il problema della ricerca di una primitiva ammette un'unica soluzione.

Esempio (Esponenziale). Consideriamo il seguente problema: trovare tutte le funzioni che verificano la proprietà di avere come derivata la funzione stessa e che in 0 valgono 1, cioé

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale problema é la funzione esponenziale $y(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Si noti che cambiando il dato iniziale $y(0)$ cambia anche la soluzione del problema (se $y(0) = C$, $y'(t) = Ce^t$).

Esempio (molla elastica). Consideriamo una punto materiale di massa m vincolato ad una molla elastica. Dalla legge di Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ e dalla legge di Hooke (l'allungamento subíto da un corpo elastico é direttamente proporzionale alla forza ad esso applicata), si ottiene l'equazione

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

ove $x = x(t)$ é l'equazione di moto (incognita) e k é la costante elastica di richiamo (con $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ indichiamo rispettivamente la derivata prima (velocità) e la derivata seconda (accelerazione) della funzione x = x(t)). Dalla Fisica si sa che il moto della massa vincolata é completamente noto se si conoscono la posizione iniziale $x(0)$ e la velocità iniziale $\dot{x}(0)$ del corpo. Quindi il problema

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -kx(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

determina univocamente il moto $x(t)$ del punto materiale $\forall t \in \mathbb{R}$.

Definizione e notazioni: I tre esempi precedenti sono tre esempi di equazioni differenziali ordinarie. Essi si possono infatti scrivere nella forma

$$F\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{0.6}$$

ove F é una funzione $F : A \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. L'equazione (0.6) si dice un'equazione differenziale di ordine n nell'incognita $y = y(t)$ ove abbiamo indicato con $y^{(k)}$ la derivata di ordine k di y e con t la variabile indipendente.
L'equazione (0.6) si dice in *forma normale* se é possibile esplicitare la derivata di ordine massimo rispetto alle altre derivate, cioé se

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right) \tag{0.7}$$

ove $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, Ω aperto (si osservi che i tre esempi visti in precedenza possono essere riportati in forma normale).
Tenuto conto di quanto visto negli esempi introduttivi, all'equazione differenziale (0.7) si affiancano i cosiddetti dati iniziali:
Fissato $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tale che $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$, si considera il problema

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) = y_{n-1} \end{cases} \tag{0.8}$$

Il problema (0.8) prende il nome di *problema di Cauchy* associato all'equazione differenziale (0.7). Esso corrisponde ad associare ad un'equazione differenziale di ordine n un dato iniziale che é costituito dal valore della funzione e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$ all'istante iniziale t_0.

DEFINIZIONE 8.1. Una soluzione del problema di Cauchy (0.8) é una funzione $y \in C^n(I)$, ove I é un *intervallo aperto* contente t_0, tale che y soddisfa l'equazione (0.7) $\forall t \in I$ e soddisfa il dato iniziale.

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

D'ora in avanti ci limiteremo a considerare il problema di Cauchy per un'equazione del primo ordine

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{0.9}$$

ove $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE. L'interpretazione geometrica del problema di Cauchy (0.9) é la seguente. In ogni punto del piano delle fasi (y, t) la curva descritta dalla soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine ha come tangente il vettore $(1, y(t))$ (si ricordi il significato geometrico della derivata). Inoltre tale curva deve passare per il punto (t_0, y_0), dato iniziale del problema

Vediamo ora sotto quali condizioni il problema di Cauchy (0.9) ammette una soluzione e sotto quali condizioni tale soluzione é unica.

TEOREMA 8.2 (*Teorema di Peano*). *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Allora il problema di Cauchy (0.9) ammette (almeno) una soluzione $y = y(t) \in C^1(I)$ ove $I \subset \mathbb{R}$ é un intervallo aperto contenente t_0.*

Il teorema precedente é un teorema di esistenza locale, nel senso che assicura l'esistenza di una soluzione nell'intorno del punto t_0, anche se a priori f potrebbe essere definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre, come il seguente esempio mostra, la continuità non garantisce l'unicità della soluzione.

Esempio (*Pennello di Peano*). Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{0.10}$$

Quindi $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ é una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Si puó facilmente verificare che le funzioni

$$y(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0; \\ \frac{1}{4}t^2, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

sono due soluzioni del problema (0.10). In realtà il problema (0.10) ammette infinite soluzione date da

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - t_1)^2, & \text{se } t < t_1; \\ 0, & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2; \\ \frac{1}{4}(t - t_2)^2, & \text{se } t > t_2. \end{cases}$$

ove $t_1 < 0$, $t_2 > 0$ sono arbitrariamente scelti.

Nel prossimo teorema si vedrà che con opportune ipotesi anche l'unicitá locale puó essere a priori garantita.

Teorema 8.3 (*Teorema di Cauchy-Lipschitz*). *Dato* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *e* $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ *per* a, b *reali positivi, sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *continua e tale che il rapporto incrementale di* f *rispetto a* y *sia uniformemente limitato rispetto* t, *cioé* $\exists L > 0$ *tale che*

$$\left| \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq L \tag{0.11}$$

per ogni (t, y_1), $(t, y_2) \in \Omega$, $y_1 \neq y_2$.
Allora il problema di Cauchy (0.9) *ammette un'unica soluzione* $y = y(t) \in C^1(I)$ *ove* I *é un intervallo aperto contenente* t_0.

Osservazione. Ad esempio la funzione $f(t, y) = |y|$ verifica la condizione (0.11) poiché

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$$

cioé (0.11) con $L = 1$. Si noti invece che la funzione $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ nel problema (0.10) non verifica l'ipotesi (0.11): per $y_1 = 0$ e $y_2 \to y_1$, il rapporto $|(f(t, y_2) - f(t, y_1))/(y_2 - y_1)| \to \infty$.
Si osservi che la condizione (0.11) é una condizione sufficiente, ma non necessaria per l'unicità della soluzione di (0.9). Una condizione più facile da verificare che implica la condizione (0.11) é che f sia derivabile parzialmente rispetto y e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ sia continua e limitata in un intorno del dato iniziale (t_0, y_0).

Il Teorema 8.3 é un teorema di esistenza ed unicità locale. Quindi garantisce l'esistenza ed unicità solo in un intorno del tempo iniziale t_0 come il seguente esempio mostra

Esempio. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{0.12}$$

Allora si verifica direttamente che $y(t) = \tan(t)$ é soluzione di (0.12) (si ricordi che $D\tan(t) = \tan^2(t) + 1$). Poiché $f(t, y) = y^2 + 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2y$ sono continue, la soluzione é anche unica in un intorno di $t_0 = 0$. Si noti peró che sebbene $f(t, y)$ sia continua e derivabile rispetto y in $\mathbb{R}^2$, la soluzione é definita solo nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ e tende a $\pm\infty$ per $t \to \pm\frac{\pi}{2}$.

Concludiamo con un teorema di esistenza ed unicitá globale

TEOREMA 8.4 (*Teorema di esistenza globale*). *Nelle stesse ipotesi del Teorema 8.3, sia $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}$ e sia*

$$\left| \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq L \tag{0.13}$$

per ogni $t \in (a, b)$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \neq y_2$.
Allora il problema di Cauchy (0.9) ammette un'unica soluzione $y = y(t) \in C^1(a, b)$

OSSERVAZIONE. Ad esempio (0.13) é verificata se f é derivabile parzialmente rispetto y e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ é limitata in $(a, b) \times \mathbb{R}$. Sotto queste ipotesi la soluzione esiste su tutto l'intervallo temporale (a, b).

Il resto dela sezione é dedicato allo studio di particolari classi di equazioni differenziali per cui é possibile calcolare esplicitamente la soluzione:

a) equazioni differenziali lineari del primo ordine;
b) equazioni differenziali a variabili separabili.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Siano $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzione continue, $t_0 \in I$ con I intervallo aperto, e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{0.14}$$

In questo caso abbiamo un'equazione del primo ordine con $f(t, y) = a(t)y + b(t)$. L'equazione si dice lineare poiché la dipendenza di f dall'incognita y é lineare. L'equazione si dice *omogenea* se $b(t) \equiv 0$; $b(t)$ é detto anche *termine noto*. Poiché f é continua e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = a(t)$ é continua, (0.14) soddisfa le ipotesi del Teorema 8.3 e quindi localmente esiste un'unica soluzione del problema. Per trovare una formula di risoluzione per il problema (8.3) procediamo in due passi:

Equazione omogenea: Consideriamo prima il caso in cui $b(t)$ sia identicamente nullo e cerchiamo una soluzione del tipo $y(t) = Ce^{A(t)}$ ove $A(t)$ é una primitiva di $a(t)$, cioé $A'(t) = a(t)$. Sostituendo nell'equazione omogenea si ottiene

$$y'(t) = CA'(t)e^{A(t)} = Ca(t)e^{A(t)} = a(t)y(t).$$

Quindi $y(t)$ soddisfa l'equazione; imponendo il dato iniziale si ottiene

$$y(0) = y_0 \Longleftrightarrow Ce^{A(0)} = y_0 \Longleftrightarrow C = y_0$$

se $A(0) = 0$, cioé se $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$. Concludendo l'unica soluzione di (0.14) nel caso in cui $b(t) \equiv 0$ é data dalla formula

$$y(t) = y_0 e^{A(t)} \qquad \text{ove } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \tag{0.15}$$

Equazione non omogenea: In questo caso si procede attraverso il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie:* conoscendo una soluzione del problema omogeneo nella forma $y(t) = Ce^{A(t)}$, si cerca una soluzione del problema non omogeneo nella forma $y(t) = C(t)e^{A(t)}$, cioé si suppone che la costante C sia in realtá una funzione. Poiché $y'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)}$, sostituendo nell'equazione si ottiene

$$C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t)$$

da cui $C'(t) = e^{-A(t)}b(t)$ e quindi $C(t) = \int e^{-A(t)}b(t)dt + K$, ove $K \in \mathbb{R}$ é la costante di integrazione. Quindi le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea sono

$$y(t) = e^{A(t)} \left[K + \int e^{-A(t)} b(t)dt \right] \tag{0.16}$$

ove $A(t)$ é una primitiva di $a(t)$ e $K \in \mathbb{R}$. Imponendo il dato iniziale si ottiene infine la formula per la soluzione del problema di Cauchy (0.14)

$$y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \right] \qquad \text{ove } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds. \tag{0.17}$$

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 2ty(t) + t^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Poiché $a(t) = 2t$, $b(t) = t^3$ sono continue su $\mathbb{R}$, la soluzione del problema é definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $A(t) = \int_0^t 2s\, ds = t^2$. Sostituendo in (0.17), si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{t^2} \left[1 + \int_0^t e^{-s^2} s^3\, ds \right] = e^{t^2} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-s^2} (s^2+1) \Big|_0^t \right] = \\ &= e^{t^2} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-t^2} (t^2+1) + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{2} e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2+1) \end{aligned}$$

Osservazione. Si noti che

$$\int e^{-s^2} s^3\, ds \underbrace{=}_{\substack{r=-s^2 \\ dr=-2sds}} = \frac{1}{2} \int re^r dr = \frac{1}{2}[re^r - \int e^r dr] = -\frac{1}{2} e^{-s^2}(s^2+1) + C.$$

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Poiché $a(t) = 1/t$, $b(t) = t^3$, una soluzione é definita in $(-\infty, 0)$ oppure in $(0, +\infty)$. Essendo $t_0 = 1$, scegliamo l'intervallo $(0, +\infty)$.
Si ha inoltre $A(t) = \int_1^t 1/s\, ds = \ln |t|$. Quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\ln |t|} \left[0 + \int_1^t s^3 e^{-\ln |s|}\, ds \right] = \\ &= t \int_1^t s^2\, ds = \frac{t^4}{3} - \frac{t}{3} \end{aligned}$$

Equazioni differenziali a variabili separabili. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = h(t)g(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{0.18}$$

In questo caso si ha $f(t, y) = h(t)g(y)$, cioé f si presenta come il prodotto di una funzione g che dipende solo da y per una funzione h che dipende solo da t. Le ipotesi del Teorema di Cauchy-Lipschitz sono ad esempio verificate se $h(t)$ é continua in un intorno di t_0 e $g(y)$ é derivabile in un intorno di y_0 (poiché in questo caso f é continua e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(t)g'(y)$ é continua, vedi Osservazione 8).
Per trovare la soluzione di (0.18) distinguiamo due casi:

1. Se $g(y_0) = 0$, allora si verifica facilmente tramite sostituzione che la funzione $y(t) \equiv y_0$ é soluzione del problema di Cauchy (0.18). Tale soluzione si dice soluzione stazionaria del problema poiché un punto materiale che si trova nella posizione y_0 al tempo t_0 rimane in y_0 per ogni tempo t.

2. Se $g(y_0) \neq 0$, procediamo nel seguente modo: dividiamo l'equazione differenziale per $g(y(t))$ e integriamo in (t_0, t) ottenendo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{t_0}^{t} h(s) ds \tag{0.19}$$

Osserviamo che poiché $g(y_0) \neq 0$, g é continua e $y(t)$ é derivabile (e quindi continua), per il Teorema della Permanenza del Segno, $g(y(t)) \neq 0$ per t vicino a t_0, quindi l'equazione (0.19) é ben definita. Attraverso il cambiamento di variabile $r = y(s)$ (quindi $dr = y'(s)ds$, $t_0 \to y(t_0)$, $t \to y(t)$) nell'integrale a destra dell'equazione (0.19) si ottiene

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dr}{g(r)} = \int_{t_0}^{t} h(s) ds \tag{0.20}$$

Trovando una primitiva G della funzione $1/g$ e una primitiva H della funzione h in (0.20) si ottiene l'equazione

$$G(y(t)) = G(y_0) + H(t) - H(t_0)$$

che definisce implicitamente l'unica soluzione di (0.18) nel caso in cui $g(y_0) \neq 0$. Se possibile, da questa formula si esplicita $y(t)$ in funzione dei dati del problema

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{0.21}$$

Allora $f(t, y) = y^2$, cioé $g(y) = y^2$, $h(t) = 1$. Le condizioni di esistenza ed unicitá locale sono verificate (vedi Teorema 8.3), quindi il problema ammette un'unica soluzione in un intorno di $t_0 = 0$.
1. $g(y_0) = 0$ se e solo se $y_0^2 = 0$. Quindi per $y_0 = 0$, si ha la soluzione stazionaria $y(t) \equiv 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
2. Se $g(y_0) \neq 0$, allora applicando (0.20)

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dr}{r^2} = \int_0^t ds,$$

quindi

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0} = t \iff y(t) = \frac{1}{1 - ty_0}.$$

Si noti che la soluzione é definita per $t \in (-\infty, \frac{1}{y_0})$ se $y_0 > 0$, $t \in (\frac{1}{y_0}, +\infty)$ se $y_0 < 0$.

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{t}{y(t)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Allora $f(t, y) = -\frac{t}{y}$, cioé $g(y) = 1/y$, $h(t) = -1$. Si osservi che poiché $g(y)$ é definito in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, si deve imporre che $y_0 \neq 0$; in questo caso le condizioni di esistenza ed unicitá locale sono verificate (vedi Teorema 8.3). Quindi il problema ammette un'unica soluzione in un intorno di $t_0 = 0$.
1. $g(y_0) = 0$ se e solo se $1/y_0 = 0$, mai. Quindi non ci sono soluzioni stazionarie.
2. Applicando (0.20)

$$\int_{y_0}^{y(t)} r\, dr = \int_0^t -r\, dr,$$

quindi

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{t^2}{2} \iff y^2(t) = y_0^2 - t^2.$$

Quindi

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 - t^2},\ t \in (-y_0, y_0) & \text{se } y_0 > 0; \\ -\sqrt{y_0^2 - t^2},\ t \in (y_0, -y_0) & \text{se } y_0 < 0. \end{cases}$$

Equazioni differenziali del 2° ordine a coefficienti costanti.

Si dice equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y''(t) + a\,y'(t) + by(t) = f(t) \qquad t \in I, \tag{0.22}$$

ove $a, b \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ é un intervallo e $f \in C(I)$ (f é detto *termine noto*). Enunciamo il seguente risultato di esistenza e unicitá.

Proposizione 8.5. *Il problema di Cauchy associato a* (0.22)

$$\begin{cases} y''(t) + a\,y'(t) + by(t) = f(t) \qquad t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \tag{0.23}$$

ammette un'unica soluzione $y \in C^2(I)$.

Per calcolare la soluzione di (0.23), nel seguito otterremo una formula che consente di calcolare la generica soluzione di (0.22), cioé calcoleremo il suo integrale generale.

Osservazione. Si dice *integrale generale* di una data equazione differenziale una formula che consente di rappresentare tutte le sue soluzioni (ad esempio la formula (0.16) é l'integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine (0.14)).

Studiamo dapprima la struttura dello spazio delle soluzioni di (0.22). Si dice *equazione omogenea* associata a (0.22) l'equazione

$$y''(t) + a\,y'(t) + by(t) = 0. \tag{0.24}$$

Proposizione 8.6. *Se y_1, y_2 sono due soluzione di* (0.24)*, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha y_1 + \beta y_2$ é una soluzione di* (0.24)*. Quindi l'insieme delle soluzioni di* (0.24) *é uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per definizione

$$\begin{aligned} y_1''(t) + a\,y_1'(t) + b\,y_1(t) = 0, \\ y_2''(t) + a\,y_2'(t) + b\,y_2(t) = 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per α, la seconda equazione per β e sommando le equazioni ottenute si ha

$$\begin{aligned} \alpha y_1''(t) + \alpha a\,y_1'(t) + \alpha b\,y_1(t) + \beta y_2''(t) + \beta a\,y_2'(t) + \beta b\,y_2(t) = 0 \Longleftrightarrow \\ (\alpha y_1(t) + \beta y_2(t))'' + a(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t))' + b(\alpha y_2(t) + \beta y_2(t)) = 0 \end{aligned}$$

cioé $\alpha y_1 + \beta y_2$ é una soluzione di (0.24). Quindi combinazione lineare di soluzioni di (0.24) é ancora soluzione di (0.24); pertanto l'insieme delle soluzioni di (0.24) é uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si noti che il vettore nullo dello spazio vettoriale cosí ottenuto é la funzione $y(t) \equiv 0$. $\square$

Teorema 8.7.

i) *Se $y_1(t)$, $y_2(t)$ sono due soluzioni di* (0.22)*, allora $y_1(t) - y_2(t)$ é una soluzione di* (0.24).
ii) *Se $y_0(t)$ é una soluzione di* (0.24)*, $\bar{y}(t)$ é una soluzione di* (0.22)*, allora $y_0(t) + \bar{y}(t)$ é una soluzione di* (0.22)
iii) *Se $y_0(t)$ é l'integrale generale di* (0.24)*, $\bar{y}(t)$ una soluzione particolare di* (0.22)*, allora l'integrale generale di* (0.22) *é della forma*

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t)$$

Dimostrazione. Proviamo *i)*. Per definizione di soluzione

$$y_1''(t) + a\,y_1'(t) + b\,y_1(t) = f(t),$$
$$y_2''(t) + a\,y_2'(t) + b\,y_2(t) = f(t).$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene

$$y_1''(t) + a\,y_1'(t) + b\,y_1(t) - \big(y_2''(t) + a\,y_2'(t) + b\,y_2(t)\big) = 0 \iff$$
$$(y_1(t) - y_2(t))''(t) + a(y_1(t) - y_2(t))' + b\,(y_1(t) - y_2(t)) = 0$$

quindi $y_1(t) - y_2(t)$ é una soluzione di (0.24).
Proviamo *ii)*. Si ha

$$y_0''(t) + a\,y_0'(t) + b\,y_0(t) = 0,$$
$$\bar{y}''(t) + a\,\bar{y}'(t) + b\,\bar{y}(t) = f(t)$$

e quindi sommando le due equazioni precedenti si ottiene subito che $y_0(t) + \bar{y}(t)$ é una soluzione di (0.22).
Per provare *iii)*, si osservi che se $y(t)$ é una soluzione di (0.22) allora da *i)* $y(t) - \bar{y}(t)$ é soluzione di (0.24), quindi $y(t) - \bar{y}(t) = y_0(t)$ ove $y_0(t)$ é l'integrale generale dell'equazione omogenea. Si ottiene infine che $y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t)$. □

Dal teorema precedente segue che per trovare l'integrale generale dell'equazione non omogenea (0.22) si deve:

- trovare l'integrale generale $y_0(t)$ dell'equazione omogenea (0.24);
- trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (0.22).

Affronteremo ora separatamente i due punti precedenti.

Integrale generale dell'equazione omogenea. In base alla Proposizione 8.6 l'insieme delle soluzioni di (0.24) forma uno spazio vettoriale. Si puó dimostrare che tale spazio ha **dimensione** 2, quindi ogni altro elemento dello spazio si puó scrivere come combinazione lineare di 2 soluzioni linearmente indipendenti. Per verificare se due soluzioni sono linearmente indipendenti introduciamo la seguente definizione.

Definizione 8.8. Date due soluzioni $y_1(t)$, $y_2(t)$ di (0.24), si definisce *matrice Wronskiana* associata a $y_1(t)$, $y_2(t)$ la matrice $W(t)$ definita da

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \tag{0.25}$$

Proposizione 8.9. *Siano $y_1(t)$, $y_2(t)$ due soluzioni di (0.24). Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

i) $y_1(t)$, $y_2(t)$ *sono linearmente indipendenti;*
ii) $\det(W(t)) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$*;*
iii) *esiste* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $\det(W(t_0)) \neq 0$.

Dimostrazione. Mostriamo solo che *ii)* $\Rightarrow$ *i)* (le altre implicazioni si dimostrano in maniera simile). Assumiamo per assurdo che $y_1(t)$, $y_2(t)$ siano linearmente dipendenti, quindi per definizione esistono α, β non entrambi nulli tali che $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Derivando otteniamo $\alpha y_1'(t) + \beta y_2'(t) = 0$ da cui

$$\begin{cases} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0 \\ \alpha y_1'(t) + \beta y_2'(t) = 0 \end{cases}$$

Fissato t, poiché $\det(W(t)) \neq 0$, il sistema precedente nelle incognite α, β ammette solo la soluzione nulla, una contraddizione al fatto che α, β non siano entrambi nulli. □

Per trovare le due soluzioni linearmente indipendenti di (0.24), procediamo nel seguente modo: cerchiamo una soluzione del tipo $y_0(t) = e^{\lambda t}$, con λ da determinare. Sostituendo nell'equazione (0.24) si ottiene

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0,$$

cioé, poiché $e^{\lambda t} \neq 0$,

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{0.26}$$

L'equazione (0.26) si dice *equazione caratteristica* associata all'equazione differenziale omogenea (0.24). Distinguiamo tre casi, a seconda che (0.26) abbia

(1) 2 radici reali e distinte,
(2) 1 radice reale doppia,
(3) 2 radici complesse e coniugate.

1) Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ le due radici reali e distinte di (0.26). Per costruzione, $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni di (0.24), inoltre sono linearmente indipendenti poiché

$$\det(W(t)) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Quindi l'integrale generale di (0.24) é dato da

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.27}$$

Esempio. Si consideri l'equazione

$$y''(t) + 3y'(t) - 10y(t) = 0 \tag{0.28}$$

L'equazione caratteristica associata é

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

quindi $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -5$. Infine l'integrale generale di (0.28) é

$$y_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-5t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ la radice di molteplicità due di (0.26) (si ricordi che deve aversi $\Delta = a^2 - 4b = 0$). Allora una soluzione di (0.24) é data da $y_1(t) = e^{\lambda t}$. Per trovare un'altra soluzione procediamo attraverso il metodo della variazione delle costanti e cerchiamo una soluzione nella forma

$$y(t) = C(t)e^{\lambda t} \tag{0.29}$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} &C''(t)e^{\lambda t} + 2C'(t)\lambda e^{\lambda t} + C(t)\lambda^2 e^{\lambda t} + a(C'(t)e^{\lambda t} + C(t)\lambda e^{\lambda t}) + bC(t)e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \\ &C'' e^{\lambda t} + C'(t)e^{\lambda t}[2\lambda + a] + C'(t)e^{\lambda t}[\lambda^2 + a\lambda + b] = 0. \end{aligned}$$

Poiché λ é radice doppia di (0.26), $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $\lambda = -a/2$; quindi sostituendo nell'equazione precedente si ottiene $C'' e^{\lambda t} = 0$, cioé $C''(t) = 0$; integrando due volte si ottiene $C(t) = K_1 t + K_2$ ove $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie di integrazione. Sostituendo in (0.29) con $K_1 = 1$ e $K_2 = 0$ si ha $y(t) = te^{\lambda t}$. L'integrale generale di (0.24) é dato in questo caso da

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.30}$$

(si verifica facilmente che $e^{\lambda t}$ e $te^{\lambda t}$ sono linearmente indipendenti attraverso il calcolo della loro Wronskiana)

Esempio. Si consideri l'equazione

$$y''(t) - 10y'(t) + 25y(t) = 0 \tag{0.31}$$

L'equazione caratteristica associata é

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

quindi $\lambda = 5$ é soluzione doppia. L'integrale generale di (0.31) é

$$y_0(t) = C_1 e^{5t} + C_2 t e^{5t}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Supponiamo infine che (0.26) ammetta due radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$; Allora é ancora vero che $\bar{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\bar{y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti di (0.24); tuttavia se vogliamo esprimere le due soluzioni come funzioni di una variabile reale si puó procedere nel seguente modo. Poiché

$$\bar{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$
$$\bar{y}_1(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$$

e combinazione lineare (anche a coefficienti complessi) di soluzioni é ancora soluzione, allora

$$y_1(t) = \frac{\bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$
$$y_2(t) = \frac{\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

sono ancora soluzioni di (0.24). Inoltre si verifica attraverso il calcolo della Wronskiana che sono linearmente indipendenti. Quindi l'integrale generale di (0.24) é dato da

$$y_0(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.32}$$

Esempio. Si consideri l'equazione

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0 \tag{0.33}$$

L'equazione caratteristica associata é

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

quindi $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$. L'integrale generale di (0.33) é

$$y_0(t) = C_1 e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) + C_2 e^{-t}\sin(\sqrt{2}t), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Avendo trovato attraverso le formule (0.27), (0.30) e (0.32) l'integrale generale dell'equazione omogenea, affrontiamo il secondo problema: il calcolo di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (0.22). Presenteremo due tecniche differenti

- Metodo della variazione delle costanti arbitrarie
- Metodo di somiglianza

Come vedremo il primo metodo si puó applicare qualunque sia il termine noto ma richiede spesso dei calcoli laboriosi, il secondo metodo invece si puó utilizzare solo se il termine noto ha una forma particolare ma é molto semplice da applicare.

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie: In precedenza abbiamo visto che l'integrale generale dell'equazione omogenea (0.24) si scrive nella forma

$$y_0(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \tag{0.34}$$

ove $y_1(t)$, $y_2(t)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti di (0.24). Cerchiamo una soluzione particolare di (0.22) nella forma

$$\bar{y}(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t) \tag{0.35}$$

ove $y_1(t)$, $y_2(t)$ come in (0.34) e $C_1(t)$, $C_2(t)$ due funzioni da determinare in modo che $\bar{y}(t)$ sia soluzione di (0.22) (in sostanza, le due costanti C_1, C_2 sono diventate due funzioni $C_1(t)$, $C_2(t)$, da qui il nome del metodo). Si ha

$$\bar{y}'(t) = C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) + C_1(t)y_1'(t) + C_2(t)y_2'(t).$$

Imponiamo come prima condizione che

$$\boxed{C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0.} \tag{0.36}$$

Quindi

$$\bar{y}''(t) = C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + C_1(t)y_1''(t) + C_2(t)y_2''(t).$$

Sostituendo in (0.22), si ha

$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + C_1(t)y_1''(t) + C_2(t)y_2''(t) + a\left(C_1(t)y_1'(t) + C_2(t)y_2'(t)\right) + b\left(C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)\right) = f(t)$$

da cui, riordinando i termini e ricordando che $y_1(t)$, $y_2(t)$ sono soluzioni di (0.24), si ha

$$C_1(t)\underbrace{(y_1''(t) + ay_1'(t) + by_1(t))}_{=0} + C_2(t)\underbrace{(y_2''(t) + ay_2'(t) + by_2(t))}_{=0} + \boxed{C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = f(t)}$$

Quindi, tenendo conto di (0.36), otteniamo un sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite $C_1'(t)$, $C_2'(t)$

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = f(t) \end{cases} \tag{0.37}$$

Si osservi che la matrice del sistema in (0.37) é data dalla Wronskiana di $y_1(t)$, $y_2(t)$ e quindi $\det(W(t)) \neq 0$ $\forall t$, vedi Prop. 8.9. Applicando la regola di Cramer e integrando si ottiene

$$C_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}\, dt, \qquad C_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}\, dt. \tag{0.38}$$

Sostituendo le costanti arbitrarie $C_1(t)$, $C_2(t)$ così calcolate in (0.35), si ottiene una soluzione particolare di (0.22).

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 6\,y'(t) + 9y(t) = \frac{e^{3t}}{t} \qquad t \in \mathbb{R}, \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0. \end{cases} \tag{0.39}$$

Calcoliamo prima la soluzione dell'equazione omogenea associata a (0.39). L'equazione caratteristica é

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

che ammette la radice doppia $\lambda = 3$. L'integrale generale dell'equazione omogenea quindi é

$$y_0(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Applicando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma

$$y_0(t) = C_1(t)e^{3t} + C_2(t)te^{3t}, \tag{0.40}$$

con $C_1(t)$, $C_2(t)$ due funzioni da determinare attraverso il sistema (vedi (0.37))

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{3t} + C_2'(t)te^{3t} = 0 \\ C_1'(t)3e^{3t} + C_2'(t)(e^{3t} + 3te^{3t}) = \frac{e^{3t}}{t^2}. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema precedente con la regola di Cramer ed integrando si ha

$$C_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^{3t} \\ \frac{e^{3t}}{t^2} & (e^{3t}+3te^{3t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (e^{3t}+3te^{3t}) \end{vmatrix}} dt = \int \frac{-\frac{e^{6t}}{t}}{e^{6t}(1+3t)-3te^{6t}} dt = -\int \frac{1}{t} dt = \ln|t|,$$

$$C_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} e^{3t} & 0 \\ 3e^{3t} & \frac{e^{3t}}{t^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (e^{3t}+3te^{3t}) \end{vmatrix}} dt = \int \frac{\frac{e^{6t}}{t^2}}{e^{6t}(1+3t)-3te^{6t}} dt = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}.$$

Sostituendo in (0.40), otteniamo la soluzione particolare

$$\bar{y}(t) = -\ln|t|e^{3t} - e^{3t}.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione é

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t} - \ln|t|e^{3t} - e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.41}$$

Dobbiamo infine imporre le condizioni iniziali per determinare C_1, C_2. Si ha

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 e^3 + C_2 e^3 - e^3 = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1. \tag{0.42}$$

Essendo $y'(t) = 3C_1 e^{3t} + C_2(e^{3t} + 3te^{3t}) - \frac{1}{t}e^{3t} - 3\ln|t|e^{3t} - 3e^{3t}$, si ha

$$y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3C_1 e^3 + 4C_2 e^3 - e^3 - 3e^3 = 0 \Leftrightarrow 3C_1 + 4C_2 = 4. \tag{0.43}$$

Le condizioni (0.42)-(0.43) danno il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 4C_2 = 4 \end{cases}$$

e quindi $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Sostituendo in (0.41), si ottiene infine la soluzione del problema di Cauchy é data da

$$y(t) = te^{3t} - \ln|t|e^{3t} - e^{3t}.$$

Poiché il dato iniziale é assegnato al tempo $t_0 = 1$, si conclude infine che la soluzione di (0.39) é soluzione del problema (0.39) in $(0, \infty)$.

Osservazione. É importante osservare che **le condizioni iniziali vanno imposte dopo aver calcolato l'integrale generale dell'equazione non omogenea.**

Metodo di somiglianza: Assumiamo che il termine noto$f(t)$ in (0.22) sia della forma

$$f(t) = P_m(t)e^{\gamma t}\cos(\delta t) \tag{0.44}$$

oppure della forma

$$f(t) = P_m(t)e^{\gamma t}\sin(\delta t) \tag{0.45}$$

ove $P_m(t)$ é un polinomio di grado $m \in \mathbb{N}$, γ, $\delta \in \mathbb{R}$. In questo caso la soluzione particolare dell'equazione non omogenea va cercata nella forma

$$\bar{y}(t) = t^k e^{\gamma t}\left[Q_m(t)\cos(\delta t) + R_m(t)\sin(\delta t)\right] \tag{0.46}$$

ove

$$\begin{cases} \bullet\ k \in \{0,1,2\} \text{ é la molteplicità di } \gamma + i\delta \text{ come radice dell'eq. caratt. (0.26);} \\ \bullet\ Q_m(t) = a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0,\ R_m(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0 \\ \quad \text{sono due generici polinomi di grado } m; \end{cases} \tag{0.47}$$

Osservazione. Si noti che $k = 0$ se $\gamma + i\delta$ non é radice di (0.26). Inoltre se nel termine noto non sono presenti sin o cos allora $\delta = 0$ e la soluzione particolare cercata é del tipo $\bar{y}(t) = t^k Q_m(t)e^{\gamma t}$ con le medesime condizioni in (0.47).

Esempi.

• Consideriamo l'equazione

$$y''(t) - y(t) = 1 + t^2. \tag{0.48}$$

Cerchiamo prima la soluzione dell'equazione omogenea associata a (0.48). L'equazione caratteristica é

$$\lambda^2 - 1 = 0 \tag{0.49}$$

quindi $\lambda_{1,2} = \pm 1$ e l'integrale generale dell'equazione omogenea é

$$y_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

il termine noto $f(t) = 1+t^2$ é della forma (0.44) con $\delta = \gamma = 0$, $m = 2$. Poiché $\gamma + i\delta = 0$ non é radice dell'equazione caratteristica (0.49), allora $k = 0$ e cerchiamo una soluzione particolare nella forma (vedi Osservazione 8)

$$\bar{y}(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

con a_0, a_1, a_2 da determinare. Derivando otteniamo

$$\bar{y}'(t) = 2a_2 t + a_1$$
$$\bar{y}''(t) = 2a_2$$

e sostituendo in (0.48), imponiamo che

$$2a_2 - (a_2 t^2 + a_1 t + a_0) = t^2 + 1.$$

Affinché i due polinomi a destra e sinistra dell'uguaglianza precedente coincidano deve aversi

$$\begin{cases} -a_2 = 1 \\ -a_1 = 0 \\ 2a_2 - a_0 = 1 \end{cases}$$

da cui $a_2 = -1$, $a_1 = 0$ e $a_0 = -3$. Quindi la soluzione particolare é

$$\bar{y}(t) = -t^2 - 3,$$

mentre l'integrale generale di (0.49)

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t^2 - 3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

• Consideriamo l'equazione

$$y''(t) + 2y'(t) = t. \tag{0.50}$$

L'equazione caratteristica é

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \tag{0.51}$$

quindi $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -2$. L'integrale generale dell'equazione omogenea é

$$y_0(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Il termine noto $f(t) = t$ é della forma (0.44) con $\delta = \gamma = 0$, $m = 1$. Poiché $\gamma + i\delta = 0$ é radice semplice dell'equazione caratteristica (0.51), cerchiamo una soluzione particolare nella forma

$$\bar{y}(t) = t(a_1 t + a_0)$$

con a_0, a_1 da determinare. Derivando otteniamo

$$\bar{y}'(t) = 2a_1 t + a_0,$$
$$\bar{y}''(t) = 2a_1.$$

Sostituendo in (0.50), imponiamo che

$$2a_1 + 2(2a_1 t + a_0) = t.$$

e quindi

$$\begin{cases} 2a_1 + 2a_0 = 0 \\ 4a_1 = 1 \end{cases}$$

da cui $a_1 = 1/4$, $a_0 = -1/4$. Quindi la soluzione particolare é

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t,$$

mentre l'integrale generale di (0.50)

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

• Consideriamo l'equazione

$$y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 2\cos(3t). \tag{0.52}$$

L'equazione caratteristica é

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \tag{0.53}$$

quindi $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. L'integrale generale dell'equazione omogenea é

$$y_0(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Il termine noto $f(t) = 2\cos(3t)$ é della forma (0.44) con $\gamma = 0$, $\delta = 3$, $m = 0$ (una costante é un polinomio di grado 0). Poiché $\gamma + i\delta = 3i$ non é radice dell'equazione caratteristica (0.53), cerchiamo una soluzione particolare nella forma

$$\bar{y}(t) = a_0 \cos(3t) + b_0 \sin(3t)$$

con a_0, b_0 da determinare. Derivando otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{y}'(t) &= -3a_0 \sin(3t) + 3b_0 \cos(3t), \\ \bar{y}''(t) &= -9a_0 \cos(3t) - 9b_0 \sin(3t) \end{aligned}$$

Sostituendo in (0.52), imponiamo che

$$-9a_0\cos(3t) - 9b_0\sin(3t) + 2(-3a_0\sin(3t) + 3b_0\cos(3t)) - (a_0\cos(3t) + b_0\sin(3t)) = 2\cos(3t)$$

cioé

$$(-10a_0 + 6b_0)\cos(3t) + (-10b_0 - 6a_0)\sin(3t) = 2\cos(3t)).$$

e quindi

$$\begin{cases} -10a_0 + 6b_0 = 2 \\ -6a_0 - 10b_0 = 0 \end{cases}$$

da cui $a_0 = -5/34$, $b_0 = 3/34$. Quindi la soluzione particolare é

$$\bar{y}(t) = -\frac{5}{34}\cos(3t) + \frac{3}{34}\sin(3t),$$

mentre l'integrale generale di (0.52)

$$y(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t} - \frac{5}{34}\cos(3t) + \frac{3}{34}\sin(3t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$